# Квант

1975
1

*Научно-популярный физико-математический журнал*

На фотографии — две электростатические машины из коллекции Государственного музея истории естествознания в Лейдене (Нидерланды).

Справа — электростатическая машина, изготовленная в 1788 году в Амстердаме Джоном Катбертсоном. Диаметр стеклянных кругов достигает 165 см. Машина соединена с лейденской банкой. Машина Катбертсона интересна тем, что это — первая электростатическая машина, которая использовалась не только для генерирования игрушечных молний. С ее помощью в 1799 году впервые был произведен электролиз воды.

Современные демонстрационные электростатические машины мало чем отличаются от машины Катбертсона.

Слева — старинная электростатическая машина. В ней заряд накапливался на стеклянном глобусе под стеклянным колоколом. При откачивании воздуха под колоколом возникал заряд.

Работа электростатических машин основана на явлении электростатической индукции. О том, как происходит наведение зарядов при электризации через влияние, рассказывается в этом номере нашего журнала на с. 00.74

Основан в 1970 году.

# Квант

1975
1

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы



**В НОМЕРЕ:**



*На первой странице обложки вы видите фотографию одной из башен Московского университета. Если спросить вас, какую форму имеет шкала сфотографированного термометра, то вы, разумеется, ответите — форму окружности. Однако на фотографии вы видите вовсе не окружность, а некоторую другую кривую — эллипс. Об этой кривой и некоторых ее свойствах вы можете прочитать в статье И. Н. Бронштейна на с. 2—8.*

# ЭЛЛИПС

И. Н. Бронштейн

**Три замечательные кривые — эллипс, гипербола и парабола, объединенные общим названием «конические сечения» — были известны еще в Древней Греции. Их открыл около 360 года до нашей эры Менехм, один из учеников знаменитого астронома, врача и математика Евдокса. Сочинения Менехма до нас не дошли, но нам известно замечательное сочинение Аполлония, посвященное этому же вопросу и написанное примерно 200 лет спустя после Менехма.**

**В этом номере мы начинаем цикл статей о конических сечениях.**

## Растяжение-сжатие плоскости (PC)

Возьмем в плоскости $\pi$ некоторую прямую $l$ и зададим положительное число $k$. Будем называть *растяжением-сжатием* (сокращенно PC*)) плоскости $\pi$ относительно оси $l$ с коэффициентом $k$ такое преобразование плоскости в себя, при котором каждая ее точка $m$ переходит в точку $M$ по следующим правилам:

1) *точки $m$ и $M$ лежат на одном перпендикуляре к оси $l$ по одну сторону от нее; точка, лежащая на самой оси, переходит в себя;*

2) *расстояние от точки до оси умножается на $k$, то есть $m_0M = k\cdot m_0m$, где $m_0$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки $m$ на ось $l$* (см. рис. 1 *а*, *б*).

Если $k>1$, то все точки плоскости (кроме точек самой оси) удаляются от оси — плоскость растягивается, а если $k<1$, то приближаются к оси — плоскость сжимается. При $k=1$ все точки плоскости остаются на месте; в этом случае мы по-

*) Это преобразование обычно называют *сжатием к оси*, понимая под этим также и растяжение (при $k>1$). По нашему мнению, такое название неудачно, так как оно иногда приводит к путанице. Например, эллипсом считают линию, полученную только с ж а т и е м окружности (см. ниже), и поэтому часто думают, что в уравнении эллипса всегда $a>b$, что не обязательно.

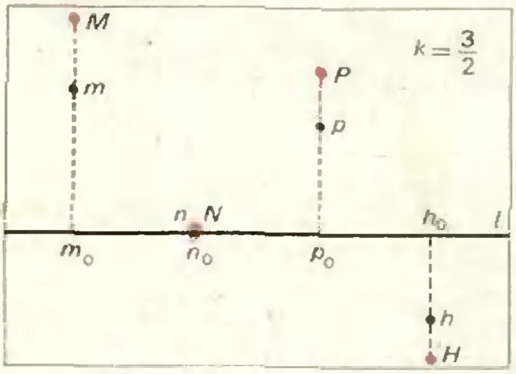



Рис. 1 а.

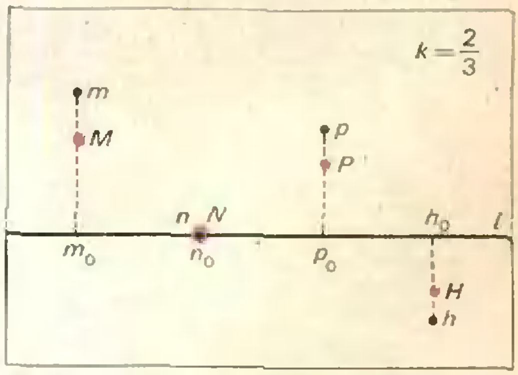



Рис. 1 б.

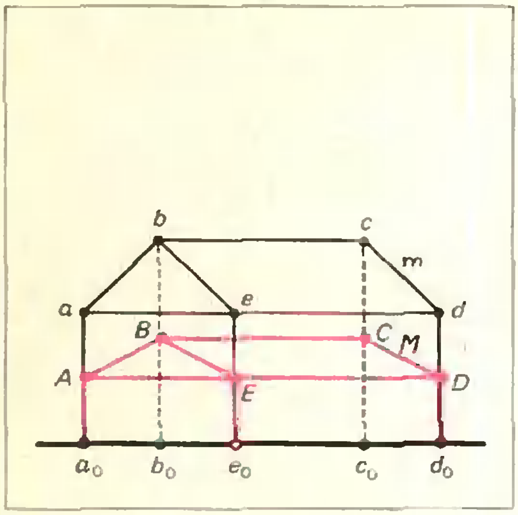



Рис. 2 а. $k=1/2$.

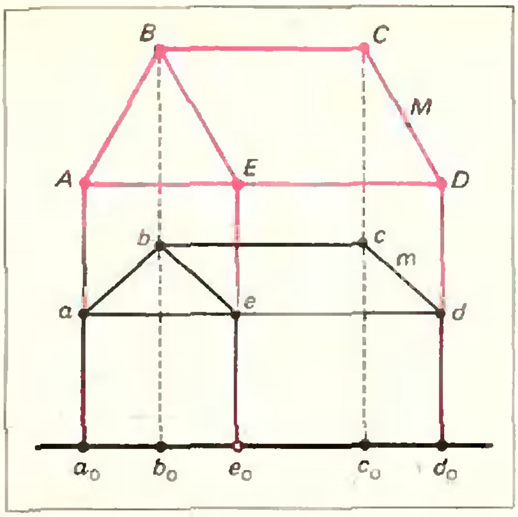



Рис. 2 б. $k=2$.

лучаем *тождественное преобразование плоскости*.

Пусть в плоскости $\pi$ дана какая-нибудь фигура $\omega$ (то есть некоторое множество точек). Нас будет интересовать множество $\Omega$ всех точек, полученных из $\omega$ в результате PC (см. рис. 2 *а*, *б*). Важно отметить, что при PC прямая линия перейдет в прямую, параллельные прямые — в параллельные, а середина отрезка — в середину. Например, если $cd \| be$, $cm = md$, то $CD \| BE$, $CM = MD$ (см. рис. 2). Доказательства этих фактов предоставляем читателю.

## Определение эллипса. Элементы эллипса

*Эллипсом* называется фигура, полученная в результате PC окружности (или круга *)). Пусть $a$ — радиус окружности (рис. 3; ось PC будем считать проходящей через центр окружности). Тогда диаметр $cd$, лежащий на оси, перейдет в себя ($CD = 2a$), а перпендикулярный к нему диаметр $eh$ — в отрезок $EH$ ($EH = 2ka$). Обозначим $OE (= OH)$ через $b$, тогда $ka = b$.

Отрезки $CD$ и $EH$ называются *осями* эллипса, а их половины $OC$, $OD$, $OE$, $OH$ (а также числа $a$ и $b$) — его *полуосями*. Если $k > 1$ (растяжение), то $b > a$ (рис. 3), если же $k < 1$ (сжатие), то $b < a$ (см. следующие рисунки). При $k = 1$ окружность перейдет в окружность *).

*) *Окружность* — линия, а *круг* — часть плоскости внутри нее. Для эллипса двух аналогичных слов нет; как сама кривая, так и часть плоскости внутри нее называются одинаково — говорят «длина эллипса», «площадь эллипса». Читатель в каждом случае без труда установит, о каком смысле слова «эллипс» идет речь.

*) Чтобы не нарушать общности определения, окружность считается частным случаем эллипса ($b = a$).

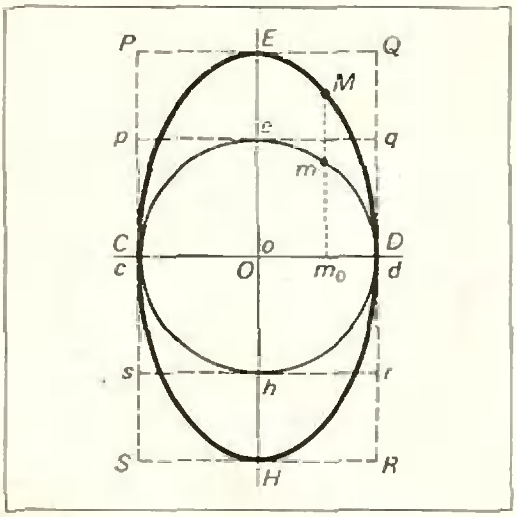



Рис. 3.

Больший из отрезков $CD$, $EH$ называется *большой осью* эллипса, а меньший — *малой* осью. Значит, если $k > 1$, то $a$ — малая полуось, а $b$ — большая, а если $k < 1$, то наоборот. В обоих случаях $k = \frac{b}{a}$.

Точка $o$ — центр окружности — при РС переходит в себя, эта точка $O$ называется *центром* эллипса, точки $C$, $D$, $E$, $H$ — его *вершинами*. Квадрат $pqrs$, описанный вокруг окружности («матери» эллипса) так, что $pq \| rs \| l$, а $qr \| sp \perp l$, преобразуется в прямоугольник $PQRS$ со сторонами $2a$ и $2b$, описанный вокруг эллипса; его называют *фундаментальным прямоугольником* для нашего эллипса. Стороны этого прямоугольника касаются эллипса в его вершинах.

### Как начертить эллипс

Если заданы оси эллипса, то проще всего начертить эллипс от руки, построив сначала фундаментальный прямоугольник, а затем вписав в него овальную кривую. Но этот метод не точен, существует много овальных кривых с одними и теми же осями симметрии (несколько таких кривых изображено на рисунке 4), но только одна из них (на рисунке 4 — красная) является эллипсом. Можно точно построить сколько угодно точек эллипса. Наиболее употребительный

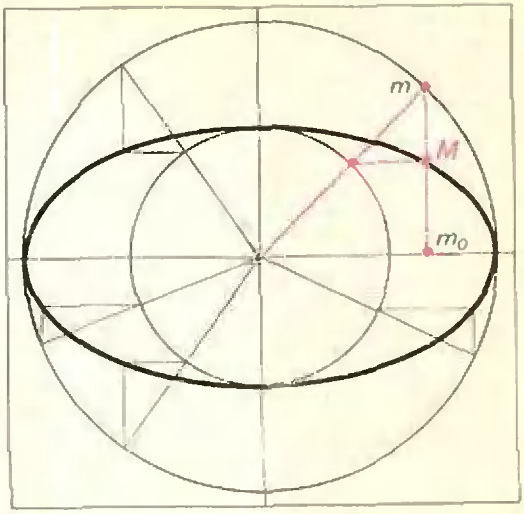



Рис. 5

и простой способ такого построения изображен на рисунке 5.

На нем две концентрические окружности имеют радиусы $a$ и $b$. Разберитесь сами в этом построении и докажите, что $m_0M = m_0m \cdot \frac{b}{a}$. Сделав такое построение для нескольких точек $m_1$, $m_2$, $m_3$,... окружности, можно получить соответствующие точки эллипса. Остается соединить их плавной линией от руки или с помощью лекала.

Начертить эллипс непрерывным движением, не отрывая карандаша от бумаги, подобно тому, как мы вычеркиваем окружность циркулем, можно специальным прибором — эллипсо-

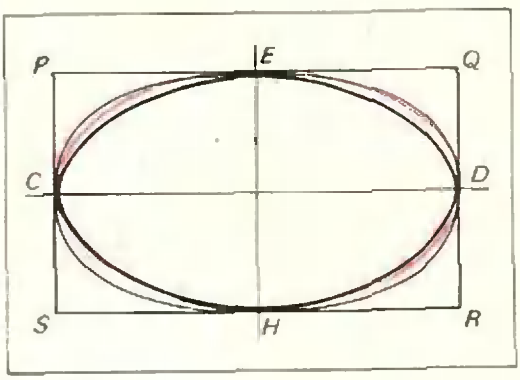



Рис. 4.

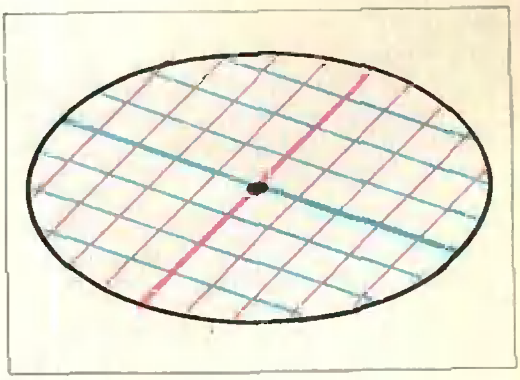


Рис. 6.

графом *). В конце статьи мы укажем простой способ непрерывного вычерчивания эллипса при помощи нити.

## Сопряженные диаметры эллипса

Отметим следующее интересное свойство эллипса: *середины всех параллельных хорд эллипса образуют отрезок, проходящий через центр эллипса* (рис. 6). Это свойство очевидно для окружности: для нее середины параллельных хорд лежат на диаметре, перпендикулярном к этим хордам. При сжатии параллельные хорды окружности переходят в параллельные хорды эллипса, а середины хорд окружности — в середины хорд эллипса. Отсюда и вытекает справедливость сформулированного свойства.

Хорда, проходящая через центр эллипса, называется его *диаметром*. У эллипса длины диаметров, вообще говоря, не одинаковы. Наибольший из них — большая ось эллипса, а наименьший — малая. Если провести в эллипсе вторую серию хорд, параллельных полученному диаметру, то их середины лежат на диаметре, принадлежащем к первой серии хорд (рис. 6). Два полученных диаметра называются *взаимно сопряженными*. Для каждого диаметра эллипса существует ему сопряженный. У окружности каждая пара сопряженных диаметров взаимно перпендикулярна, а у эллипса есть только одна пара взаимно перпендикулярных сопряженных диаметров, это — большая и малая оси.

## Уравнение линии. Уравнение эллипса

Одним из самых замечательных открытий XVII века является *метод координат* **),

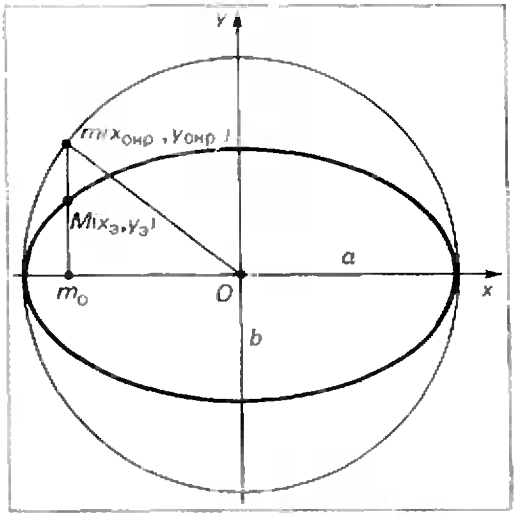



Рис. 7

позволяющий переводить геометрические понятия на алгебраический язык. Этот метод дает возможность устанавливать соответствие между линиями, лежащими на плоскости, на которой введена система координат, и уравнениями, содержащими две буквы $x$ и $y$.

*Уравнением линии* называется такое уравнение относительно $x$ и $y$, которое обращается в тождество при подстановке вместо $x$ и $y$ значений $x_0$, $y_0$ в том и только в том случае, когда точка с координатами $x_0$, $y_0$ лежит на этой линии. Например, уравнение $y=x$ есть уравнение биссектрисы I и III координатных углов, а уравнение окружности радиуса $a$ с центром в начале координат имеет вид $x^2+y^2=a^2$.

Пусть данный эллипс с полуосями $a$ и $b$ получен как РС окружности радиуса $a$ с коэффициентом $k=\frac{b}{a}$ (рис. 7). Введем на плоскости, содержащей обе эти линии, систему координат следующим образом: ось $Ox$ направим по оси РС, а ось $Oy$ — через центр окружности $o$, который является и центром эллипса, перпендикулярно к оси $Ox$. Пусть $m$ — точка на окружности, а $M$ — та точка эллипса, в которую перейдет $m$ при РС.

Координаты точки $m$ обозначим через $x_{окр}$, $y_{окр}$, а точки $M$ — $x_э$, $y_э$. По определению РС $x_э=x_{окр}$, $y_э=ky_{окр}$, откуда

$$x_{окр}=x_э,\quad y_{окр}=\frac{y_э}{k}. \qquad (*)$$

Если подставить в уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$ координаты любой точки ($x_{окр}$, $y_{окр}$), то будет верно равенство $x^2_{окр}+y^2_{окр}=a^2$, и, значит, на основании (*) верным будет равенство

$$x_э^2+\frac{y_э^2}{k^2}=a^2.$$

*) В первой публикации настоящей статьи («Квант», 1970, № 9, с. 32) приведено описание и теоретическое обоснование эллипсографа.

**) Он обычно излагается в курсе аналитической геометрии.

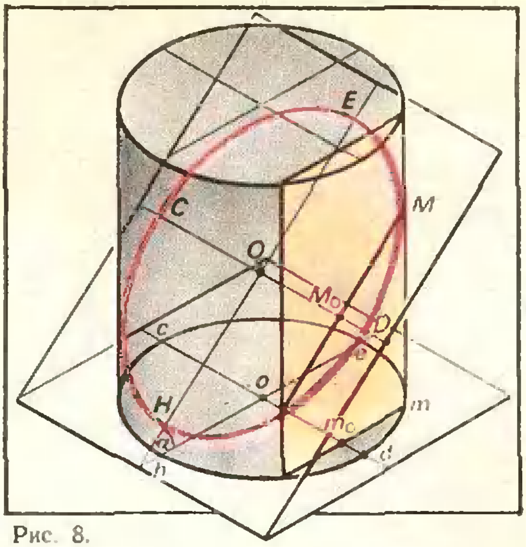



Рис. 8.

Если же точка $M'(X', Y')$ не лежит на эллипсе, то точка $m'(x', y')$, переведенная в $M'$ в результате РС, не лежала на окружности, и равенство $(x')^2 + (y')^2 = a^2$ неверно, значит, неверно и равенство

$$(X')^2 + \frac{(Y')^2}{k^2} = a^2.$$

В соответствии с определением уравнения линии мы получили также уравнение эллипса: $x^2 + \frac{y^2}{k^2} = a^2$. Поскольку $ka = b$, последнее уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (Э)$$

Это и есть уравнение эллипса в наиболее удобной (так называемой *канонической*) форме.

## Наклонные сечения кругового цилиндра

Пересекая круговой цилиндр плоскостями, наклоненными к его основанию под острым углом $\alpha$, мы получаем овальные кривые. Докажем, что они являются эллипсами. Для этого достаточно установить, что каждый такой овал получается из окружности в результате РС (а именно — растяжения) с коэффициентом $k = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Возьмем (рис. 8) в основании цилиндра два диаметра: $cd$ — параллельный и $eh$ — перпендикулярный к линии пересечения плоскости основания с плоскостью сечения цилиндра. Проведем через них и ось цилиндра плоскости $cdDC$ и $ehHE$, а также плоскость $M_0Mmm_0$, параллельную $ehHE$, проходящую через некоторую точку $M$ сечения. Зная, что проекция отрезка на некоторую прямую равна длине этого отрезка, умноженной на косинус угла между ним и его проекцией, получаем

$$\frac{M_0M}{m_0m} = \frac{OE}{oe} = \frac{1}{\cos\alpha} = k.$$

Если положить обе фигуры $CEDH$ и $cedh$ на одну плоскость так, чтобы $CD$ совместилась с $cd$, то они займут положение, показанное на рисунке 3, причем $M_0M : m_0m = k$, где $k > 1$. Этим наше утверждение доказано.

Каждый эллипс с малой полуосью $a$ и большой $b$ можно получить как сечение кругового цилиндра, радиус которого равен малой полуоси эллипса. Для этого достаточно провести сечение цилиндра плоскостью, наклоненной к основанию цилиндра под углом, косинус которого равен $\frac{a}{b}$. Это всегда возможно, так как здесь $\frac{a}{b} < 1$.

## Проекция окружности — эллипс

Если спроектировать окружность, лежащую в некоторой плоскости, на вторую плоскость, пересекающую первую под острым углом $\alpha$, то в проекции получится эллипс. Доказательство этого читатель легко проведет сам, пользуясь рисунком 8, на который нужно теперь смотреть с другой точки зрения: будем линию $CEDH$ считать окружностью ($OC = OD = OE = OH = a$), а проектирующий цилиндр — не круговым, а овальным. Здесь $cd = CD = 2a$, $eh = EH \cdot \cos\alpha = 2b$. Нужно доказать, что $cedh$ — эллипс (поверхность в этом случае называется *эллиптическим цилиндром* — по форме перпендикулярного сечения).

Путь доказательства тот же, что и для наклонного сечения кругового цилиндра. На этот раз $m_0m = M_0M\cos\alpha$. Следовательно, овал $cedh$ получен из $CEDH$ в результате РС (на этот раз — сжатия) с коэффициентом $k = \cos\alpha = \frac{b}{a}$.

Перпендикулярные диаметры окружности проектируются во взаимно сопряженные диаметры эллипса. Этот факт имеет большое значение в теории изображений пространственных фигур на плоскости*).

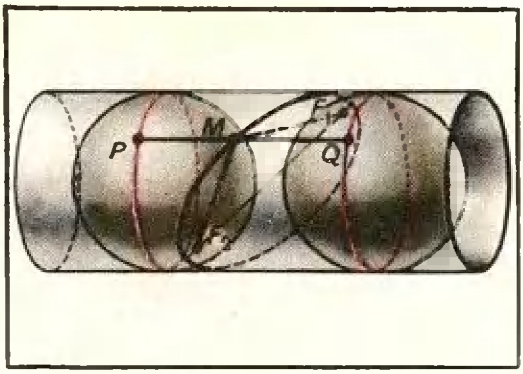



Рис. 9.

**Фокальное свойство эллипса**

Мы переходим к наиболее важному свойству эллипса — фокальному (фокальный — прилагательное от слова *фокус* **), так называются две замечательные точки, лежащие на большой оси симметрично относительно центра эллипса).

Будем рассматривать эллипс как сечение кругового цилиндра — мы видели, что всегда имеем право это сделать. Вкатим теперь в цилиндр с обоих его концов по шару (того же радиуса, что и цилиндр) так, чтобы оба шара стукнулись о плоскость этого сечения (рис. 9), на геометрическом языке — впишем шары в цилиндр так, чтобы они касались плоскости сечения.

Точки прикосновения $F_1$ и $F_2$ и будут фокусами нашего эллипса.

Каждый шар касается цилиндра по окружности (красной). Возьмем любую точку $M$ эллипса и отметим ту образующую $PQ$ цилиндра, на которой точка $M$ лежит ($P$ и $Q$ — точки этой образующей, лежащие на красных окружностях). Ясно, что $MF_1 = MQ$, так как это длины двух касательных к правому шару, проведенных из $M$ до точек прикосновения $F_1$ и $Q$ (эти отрезки равны как образующие конуса с вершиной $M$, описанного около правого шара). Рассуждая так же для левого шара, получаем: $MF_2 = MP$. Сложив оба равенства, имеем

$$MF_1 + MF_2 = MQ + MP = PQ.$$

Но длина $PQ$ одна и та же для всех образующих цилиндра, это — расстояние между плоскостями красных окружностей. Значит, какую бы точку $M$ на эллипсе ни взять, будет удовлетворяться равенство $MF_1 + MF_2 = \text{const}$.

Таким образом, *сумма расстояний от любой точки эллипса до двух его фокусов — величина постоянная.* В этом и состоит фокальное свойство эллипса. Часто эллипс и определяется как множество точек, лежащих в одной плоскости, для которых сумма расстояний до двух точек (фокусов)— величина постоянная.

Расстояние от каждого фокуса до конца малой оси равно половине длины большой оси эллипса (рис. 10) или, иначе,

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

В этой формуле $a$ — большая полуось, $b$ — малая *) $c$ — половина

---

*) См. статью Н. М. Бескина «Изображение пространственных фигур», «Квант», 1970, № 12.

**) Латинское слово *«focus»* означает *очаг*. О происхождении этого термина будет рассказано в следующих статьях.

*) Следует обратить внимание на то, что на этот раз $a$ — именно большая полуось. В формуле (Э) на с. 6 это не предполагалось. В эллипсе, полученном растяжением окружности радиуса $a$, приводимая здесь формула должна быть заменена такой:

$$c^2 = b^2 - a^2.$$

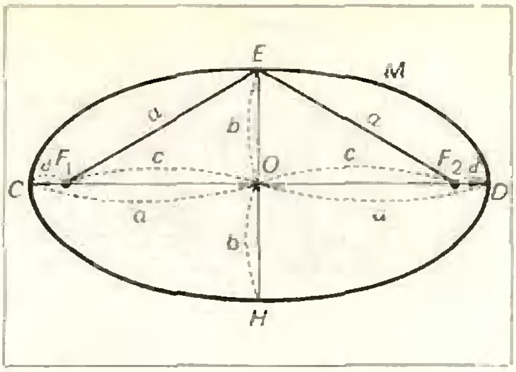



Рис. 10.

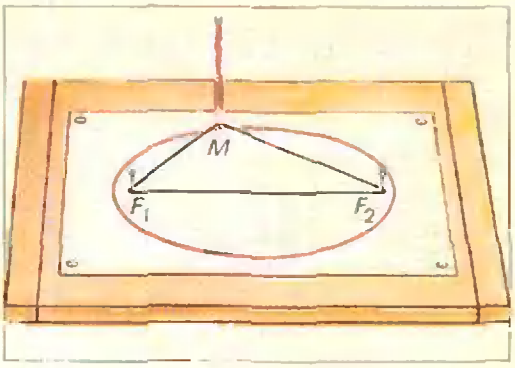



Рис. 11.

расстояния между фокусами. Для доказательства этой формулы рассмотрим конец большой оси эллипса (точка $C$ на рисунке 10). По фокальному свойству $CF_1 + CF_2 = \mathrm{const}$; вследствии симметрии $CF_1 = DF_2$; значит, постоянная const равна $CF_2 + F_2D$, то есть большой оси $2a$. С другой стороны, для конца малой оси, например, $E$, $EF_1 + EF_2 = 2a$, а так как, в силу симметрии, $EF_1 = EF_2$, то каждый из этих отрезков равен $a$. Это дает способ построения фокусов эллипса по его осям (рис. 10).

**Вычерчивание эллипса при помощи нити**

Положим лист бумаги на чертежную доску и приколем к нему две кнопки (или булавки, рис. 11). Набросив на них нитяное кольцо (длина кольца должна быть больше удвоенного расстояния между кнопками), натянем нить острием карандаша, чтобы получился треугольник $F_1MF_2$. Если вести карандаш по бумаге так, чтобы нить оставалась натянутой, то треугольник будет деформироваться, но его периметр останется постоянным. Постоянной будет и длина стороны $F_1F_2$; значит, $F_1M + F_2M = \mathrm{const}$ и карандаш опишет эллипс.

Этот способ вычерчивания эллипса используют садовники при изготовлении цветочных эллиптических клумб. Вместо кнопок к землю втыкают два колышка, кольцо делается из толстой веревки, а эллипс вычерчивается на земле не карандашом, а палкой.

* * *

Мы не объяснили происхождения названия «эллипс» (на древнегреческом «эллипсис» означает «недостаток» — причем здесь недостаток?), не рассказали о других интересных свойствах этой кривой — свойствах, общих для всех конических сечений: эллипса, гиперболы и параболы. Этому будет посвящена отдельная статья. Но предварительно в ближайших номерах мы познакомимся с гиперболой и параболой.

# Размерность физических величин и подобие явлений

А.С. Компанеец

### Смысл размерности физических величин

Все знают, что числа бывают именованные и отвлеченные. Именованные числа зависят от выбранных единиц измерения, неименованные не зависят. Если, например, в одном участке земли 100 квадратных метров ($м^2$), а в другом — 200 $м^2$, то 100 и 200 — именованные числа, а их отношение $^1/_2$ — число отвлеченное. Оно не изменится, если перейти от метрической системы мер к любой иной, измеряя площадь в квадратных аршинах или квадратных футах *). Так же точно отношение двух денежных сумм не зависит от того, в какой валюте эти суммы выражены. Важно только, чтобы обе суммы выражались в одинаковой валюте.

Можно делить друг на друга именованные числа, выражающие и совсем разные понятия, например рубли на квадратные метры. Участок земли в 100 $м^2$, который стоит 100 рублей, продается по цене 1 рубль за 1 $м^2$. Но числовое выражение результата зависит от того, в какой валюте выражена сумма и в каких единицах измерялась площадь. Иначе говоря, в результате такого деления получается опять именованная величина. Другим примером может служить ско-

*) 1 аршин = 71,1 см; 1 фут = 30,5 см.

рость — столько-то единиц длины за единицу времени. Иногда единица измерения скорости получает специальное наименование: одна морская миля (или 1852 *м*) в час — один узел.

Всякое уравнение в физике выражает соотношение, объективно существующее в природе, независимо от воли того, кто это уравнение пишет. И, конечно, обе части уравнения должны выражаться величинами, измеряемыми в одних и тех же единицах.

Единицы измерения каждой физической величины выражаются через основные единицы измерения, выбор которых в значительной степени условен. Формула, выражающая единицу измерения данной величины через основные единицы измерения, называется размерностью этой величины. Обе части каждого физического уравнения должны иметь одинаковую размерность.

Сколько основных единиц измерения необходимо выбрать? Механическое движение описывается в терминах расстояния, то есть длины, и времени. Эталоны этих двух величин необходимы во всяком случае. Но двух эталонов недостаточно. Действительно, если, например, взаимодействуют два тела одинаковой формы и размеров, то их ускорения могут быть существенно различными. Ускорение каждого из них, согласно второму закону Ньютона, зависит от его массы. Следовательно, необходим по крайней мере еще один эталон — массы. В настоящее время не известны какие-либо физические закономерности в механике, для описания которых нужны были бы новые основные эталоны, кроме длины, времени и массы. Для единиц измерения этих основных величин введены соответствующие символы L, T и M. Для обозначения размерности какой-нибудь величины $A$ пользуются символом $[A]$. Таким образом, размерность длины обозначается $[l]=\mathrm{L}$, размерность времени — $[t]=\mathrm{T}$, а размерность массы — $[m]=\mathrm{M}$. Длину, время и массу называют основными величинами, а все остальные физические величины — производными.

Заметим, что о размерности есть смысл говорить только по отношению к определенной системе единиц. Формулы размерности одной и той же физической величины в разных системах единиц могут быть различными. В данной статье мы в основном будем пользоваться системой СГС. В этой системе единиц все формулы размерности имеют вид степенных функций типа

$$[f]=\mathrm{L}^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}\mathrm{T}^{\gamma}.$$

Такой вид формул обусловлен следующими физическими соображениями. Очевидно, что отношение двух численных значений какой-либо производной величины не должно зависеть от выбора единиц измерения основных величин. Например, будем ли мы измерять время в секундах или минутах, отношение двух промежутков времени, измеренных в секундах, будет таким же, как и отношение этих промежутков, измеренных в минутах. А это требование выполняется всегда при условии, что формула размерности имеет вид степенного одночлена.

Рассмотрим теперь размерности некоторых производных физических величин. Начнем с кинематической величины — ускорения $a$. По определению это — изменение скорости за единицу времени. Следовательно, размерность ускорения есть размерность скорости, деленной на время, то есть $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}:\mathrm{T}$, или

$$[a]=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}.$$

По второму закону Ньютона сила $F$ равна массе, умноженной на ускорение. Отсюда можно получить размерность силы:

$$[F]=[m][a]=\left[\frac{ml}{t^2}\right]=\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}.$$

### Эвристическое значение размерности

Итак, физическое равенство может иметь смысл только между величинами одной и той же размерности. Если, скажем, при решении задачи проверка показала, что размерности обеих сторон полученного равенства не совпадают, значит, в решении допущена ошибка.

Цель этой статьи — показать, что понятие размерности помогает не только находить ошибки, но и получать новые результаты.

Даже тот, кто забыл самый закон Архимеда, конечно, помнит предание о том, что Архимед при открытии этого закона воскликнул «эврика», что в переводе с греческого на русский язык означает «нашел». Отсюда прилагательное «эвристический», что по-русски значит «помогающий находить», или «наводящий», «указывающий истину». Именно об этом значении теории размерности пойдет речь в этой статье.

Рассмотрим связь между законом тяготения Ньютона и третьим законом Кеплера. Заранее формулировать закон Кеплера пока нет надобности: он сам получится из дальнейших рассуждений. Чтобы не писать одни формулы, дадим волю воображению и попробуем сочинить научно-фантастический рассказ.

Итак, пусть в семье космонавтов, летящих к далекой звезде, в пути родился ребенок. Когда он подрос, отец захотел помочь ему получить наглядное представление о родной Земле и ее спутнице Луне. Для этого было решено запустить искусственный спутник космического корабля. Нельзя ли сделать это таким образом, чтобы спутник обращался вокруг космического корабля за то же время, за которое Луна обращается вокруг Земли? Каковы должны быть при этом другие параметры, описывающие движение такого спутника?

Еще Галилей установил, что в пустоте все тела свободно падают с одинаковыми ускорениями. Этот закон справедлив, если масса притягиваемого тела во много раз меньше массы тела притягивающего. Пусть масса космического корабля, предназначенного для дальнейшего путешествия, около 100 $m$. Тогда закон Галилея может быть применен, например, к детскому мячику, взятому в качестве спутника этого корабля. Обычно масса $m$ такого мячика не больше 1 *кг*, что, действительно, гораздо меньше, чем масса корабля.

Закон всемирного тяготения в элементарной форме $\left(F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}\right)$ применим к материальным точкам, то есть к таким телам, размеры которых гораздо меньше расстояния между ними. Предположим, что расстояние от космического корабля до мячика гораздо больше корабля в любом его измерении (дальше это будет подтверждено расчетом). Орбита Луны приближенно круговая, следовательно, надо, чтобы и орбита мячика была круговой — иначе не будет желаемого подобия. Такая орбита характеризуется радиусом $r$ и периодом обращения $\tau$. Покажем, как найти период обращения из учения о размерностях физических величин.

Так как сила тяготения $F$ для заданных материальных точек зависит только от расстояния между ними, а на круговой орбите расстояние не изменяется, сила тоже постоянна по величине. Именно эта сила и может сообщить спутнику необходимое центростремительное ускорение. Но вместо того, чтобы написать соответствующее уравнение движения и из него найти период обращения, воспользуемся только размерностями. Нам заданы следующие постоянные величины: сила $F$ размерности $\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}$, радиус орбиты $r$ размерности L и масса $m$ движущегося тела размерности M. Надо найти период обращения $\tau$ размерности T.

Будем искать выражение для времени обращения в виде

$$\tau=AF^xr^ym^z,$$

где $x$, $y$ и $z$ — неизвестные показатели степени, $A$ — некоторое отвлеченное число. Перепишем уравнение для $\tau$ как равенство размерностей:

$$|\tau| = |F|^x |r|^y |m|^z = \left(\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2}\right)^x \mathrm{L}^y \mathrm{M}^z.$$

Запишем левую часть в виде $\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^1$, а правую часть — $\mathrm{M}^{x+z}\mathrm{L}^{x+y}\mathrm{T}^{-2x}$ и сравним показатели степени при M, L и T. Получим три уравнения с тремя неизвестными:

$$x + z = 0,$$
$$x + y = 0,$$
$$-2x = 1.$$

Отсюда $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.

Следовательно, искомое выражение для $\tau$ должно иметь вид

$$\tau = Am^{1/2}r^{1/2}F^{-1/2} = A\left(\frac{mr}{F}\right)^{1/2}. \quad (1)$$

Если космонавты хотят, чтобы период обращения мячика был равен периоду обращения Луны вокруг Земли, они должны подобрать соответствующие величины так, чтобы отношение $\frac{mr}{F}$ было таким же, как для Луны. Как же это сделать?

Выпишем выражение для силы притяжения $F$:

$$F = \gamma\frac{mM}{r^2}. \quad (2)$$

Здесь две новые величины: масса притягивающего тела $M$ и универсальная постоянная тяготения $\gamma$. Подставим выражение для силы $F$ в равенство (1) и запишем это равенство два раза:

для системы Земля — Луна

$$\tau_1 = A\left(mr_1\frac{r_1^2}{mm_1\gamma}\right)^{1/2} = A\left(\frac{r_1^3}{m_1\gamma}\right)^{1/2} \quad (3)$$

($m$ — масса Луны, $m_1$ — масса Земли, $r_1$ — расстояние от Луны до Земли);

для системы корабль — мячик

$$\tau_2 = A\left(\frac{r_2^3}{m_2\gamma}\right)^{1/2} \quad (4)$$

($m_2$ — масса корабля, $r_2$ — расстояние от мячика до корабля).

Тогда отношение периодов обращения

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{m_2}{m_1}\frac{r_1^3}{r_2^3}\right)^{1/2} \quad (5)$$

Масса Земли $m_1 = 6\cdot10^{27}$ *г*, масса корабля $m_2 = 100$ *т* $= 10^8$ *г*, радиус лунной орбиты $r_1 = 3{,}84\cdot10^{10}$ *см*. Космонавты хотят, чтобы $\tau_1 = \tau_2$. Для этого надо взять $r_2 \approx 10^4$ *см* $= 100$ *м*. Легко проверить, что при этих условиях мячик будет обходить корабль за столько же времени, за сколько Луна обходит Землю, то есть за 29 суток.

Перепишем равенство (5) так:

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{m_2}{m_1}\frac{r_1^3}{r_2^3}. \quad (6)$$

Если два разных тела обращаются вокруг общего центра (то есть $m_1 = m_2$), как, например, планеты солнечной системы, то равенство (6) и выражает третий закон Кеплера *): квадраты времен обращения планет относятся как кубы их средних расстояний до Солнца. Слово «средних» можно было бы и опустить, потому что эллипсы планетных орбит вытянуты мало и близки к окружностям.

Напомним, что Кеплер жил до Ньютона. Фактически закон тяготения был получен из законов Кеплера, а не наоборот, как это было сделано в нашем «научно-фантастическом» примере и как это делается теперь в учебниках физики и астрономии. Покажем, что для вывода закона тяготения из законов Кеплера достаточно воспользоваться учением о размерностях. Тем самым еще раз подчеркнем эвристическую, то есть наводящую силу размерностей.

---

*) Приведем формулировки и первых двух законов Кеплера.

I. Планеты описывают эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.

II. Радиус-вектор, соединяющий Солнце с планетой, ометает в равные промежутки времени равные площади.

Заметим, что III закон в более общем виде формулируется так: квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей орбит.

Предположим, что сила притяжения планет к Солнцу имеет вид

$$F = Bmr^n. \qquad (7)$$

Здесь $B$ — величина, одинаковая для всех планет, $m$ — масса планеты, $r$ — расстояние от планеты до Солнца. Как можно догадаться, что сила $F$ зависит от массы $m$ именно линейно? Это видно из закона Галилея: ускорения всех тел под действием сил тяжести на одном и том же расстоянии от притягивающего тела одинаковы. Но ускорение равно силе, деленной на массу тела, так что ускорение при свободном падении тел может быть одним и тем же только в том случае, когда сила пропорциональна массе. Показатель степени $n$ в законе тяготения будем считать пока неизвестным, его-то нам и предстоит определить из закона Кеплера. Ведь мы как бы стали на место Ньютона и хотим прийти к закону тяготения, зная общий закон движения (то есть второй закон Ньютона) и результаты ранее живших Кеплера и Галилея.

Рассуждая так же, как при выводе формулы (5), используя предположение (7), получим

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{1-n}{2}} \qquad (8)$$

Чтобы это равенство совпало с законом Кеплера, надо положить $n = -2$, а это приводит выражение (7) к закону Ньютона, по которому сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами.

Можно еще спросить, почему закон притяжения был заранее выбран в степенной форме (7)? Дело в том, что только отношение степенных функций дает степенную же функцию отношения. Равенство

$$\frac{f(r_1)}{f(r_2)} = f\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

выполняется, только если $f(r) = r^n$. А именно степенная функция отношения входит в третий закон Кеплера:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2}.$$

Так с необходимостью из законов Кеплера и Галилея получается ньютоновский закон тяготения.

## Размерности универсальных постоянных

В закон тяготения входит универсальная постоянная $\gamma$, которая одна и та же для всех тел. Физика знает и другие универсальные постоянные. Например, скорость света в вакууме $c$, постоянная Планка $h$, элементарный электрический заряд $e$ и т. д.

Определим, в каких единицах измеряются $h$ и $e$, найдем размерности этих величин.

Для электромагнитной волны частоты $\nu$ справедливо равенство

$$E = h\nu, \qquad (9)$$

где $E$ — энергия, переносимая волной. Величина $h\nu$ называется квантом энергии. Так как частота — это число колебаний в единицу времени, $\nu$ имеет размерность обратного времени:

$$[\nu] = \left[\frac{1}{t}\right] = \frac{1}{\mathrm{T}}.$$

Универсальный коэффициент пропорциональности между энергией и частотой и есть постоянная Планка $h$. Размерность $h$, таким образом, это размерность энергии, умноженной на время

$$[h] = [Et].$$

Размерность энергии можно определить двумя способами. Либо это размерность работы — то есть силы, умноженной на путь, —

$$[E] = [Fl] = \left[\frac{ml^2}{t^2}\right] = \frac{\mathrm{ML}^2}{\mathrm{T}^2},$$

либо размерность кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$ —

$$[E] = [mv^2] = \left[\frac{ml^2}{t^2}\right] = \frac{\mathrm{ML}^2}{\mathrm{T}^2}.$$

В обоих случаях размерность должна быть одной и той же. Отсюда

$$[h] = \left[\frac{ml^2}{t}\right] = \frac{\mathrm{ML}^2}{t}.$$

Теперь с помощью закона Кулона найдем размерность электрического заряда $e$ (в системе единиц СГСЭ). Положим, что два единичных заряда в вакууме на единичном расстоянии отталкивают друг друга с силой, равной единице. Так как единицы длины и силы определены в механике, то можно найти единицу заряда через M, L и T. По закону Кулона

$$F_э = \frac{e^2}{r^2},$$

где $F_э$ — электростатическая сила. Ее размерность, как и размерность всякой силы, есть $\frac{ML}{T^2}$. Следовательно, размерность квадрата заряда равна

$$[e^2] = \frac{ML^3}{T^2},$$

а размерность заряда есть

$$[e] = \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}}{T}. \qquad (10)$$

### Природные единицы измерения

Все наши предыдущие рассуждения о размерностях основывались на произвольном выборе основных единиц измерения — сантиметра, грамма, секунды. Для этих единиц (или для кратных им единиц) были созданы соответствующие эталоны длины, массы и времени.

Известно, что хранение и сверка эталонов метрической системы мер представляют большие трудности. Знаменитый парижский эталон метра, изготовленный из сплава платины с иридием, несколько изменил свою длину и продолжает ее изменять вследствие процессов рекристаллизации. Земля вращается вокруг оси не строго равномерно, так что и эталон времени имеет погрешность. Масса одного кубического дециметра воды при 4° C (таким был первоначальный эталон массы в 1 *кг*) зависит от источника воды: в обычной воде $H_2O$ в виде примеси содержится некоторое количество тяжелой воды, в которой один из атомов водорода замещен дейтерием. Вот почему ученым приходится искать более надежные эталоны.

К счастью, такие более надежные эталоны есть, их хранит сама природа без усилий с нашей стороны. Такие эталоны уже частично перечислены: это скорость света $c$, элементарный заряд $e$ и другие универсальные постоянные величины. Иначе говоря, вместо эталонов длины, времени и массы можно выбрать эталоны других величин, изготовленные не искусственно, а содержащиеся прямо в законах физики. Количество основных величин, а значит, и основных единиц измерения, вообще говоря, можно выбирать произвольно. Но оказывается, что наиболее удобно выбирать три основные величины. Какие же тройки величин подходят для этой цели, а какие не дают полного описания размерностей?

Для примера покажем, что если в качестве эталонов выбраны $e$ и $h$, то нельзя третьим эталоном выбрать $c$. Составим отношение $\frac{e^2}{h}$ и найдем его размерность (например, в системе СГС):

$$\left[\frac{e^2}{h}\right] = \left[\frac{ml^3}{t^2}\frac{t}{ml^2}\right] = \left[\frac{l}{t}\right] = \frac{L}{T}.$$

Это размерность скорости, значит, величина $\frac{e^2}{h}$ вполне может служить эталоном скорости, так что скорость света $c$ в качестве эталона уже не нужна.

Какой же выбрать третий эталон?

Если нас интересует поведение электронов в атомах, то оказывается, что для его описания разумно в качестве третьей основной величины взять массу электрона $m$. Добавим еще, что в уравнения для электронов фактически входит не сама величина $h$, а $h$, деленное на $2\pi$. Это частное принято обозначать $\hbar$.

Тогда в качестве трех независимых эталонов удобно выбрать следующие величины: $e$, $\hbar$ и $m$. Размерность ни одной из них нельзя выразить через комбинацию размерностей двух других, в чем легко убедиться путем немногих попыток.

Если мы захотим в выбранной нами системе единиц найти радиус орбиты электрона — величину, имеющую размерность длины, то, используя метод размерностей, получим выражение

$$r = \frac{\hbar^2}{me^2}, \qquad (11)$$

то есть размерность длины в нашей системе

$$[r] = \frac{[\hbar^2]}{[m]\,[e^2]}.$$

Легко проверить, подставив размерности для $\hbar$, $m$ и $e$, например, в системе СГС (именно этой системой единиц чаще всего пользуются физики), что величина $\frac{\hbar^2}{me^2}$, действительно, имеет размерность длины:

$$\left[\frac{\hbar^2}{me^2}\right] = \left[\frac{m^2l^4}{t^2}\,\frac{1}{m}\,\frac{t^2}{ml^3}\right] = [l] = \mathrm{L}.$$

Аналогично из величин $\hbar$, $m$ и $e$ можно единственным образом получить величину с размерностью энергии:

$$E = \frac{me^4}{\hbar^2}, \qquad (12)$$

то есть

$$[E] = \left[\frac{me^4}{\hbar^2}\right].$$

Предоставим читателю убедиться по способу, которым была получена формула (7), что других величин с такими размерностями из $e$, $\hbar$ и $m$ построить нельзя.

Формулы (11) и (12) содержат в себе результаты фундаментальной важности; они позволяют оценить, по крайней мере по порядку, величины, характеризующие атом: его размеры, энергию, необходимую для удаления из него электрона. Точные значения этих величин получаются при строгом решении соответствующих уравнений. Но как бы строго ни решалось уравнение, ответ должен иметь всегда одну и ту же размерность, а она однозначно определяется формулами (11) и (12). Остается, конечно, вопрос о численных коэффициентах при размерных величинах. Эти коэффициенты могут быть получены только из строгих решений. При этом оказывается, что в ряде случаев численные коэффициенты отличаются от единицы не более чем в 2—3 раза. Например, для электрона в атоме водорода значение радиуса орбиты электрона из формулы (11) получается абсолютно точно:

$$r = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0{,}5\cdot10^{-8}\ \text{см},$$

а значение энергии ионизации

$$E = \frac{me^4}{\hbar^2} = 4{,}3\cdot10^{-11}\ \text{эрг}$$

оказывается в 2 раза больше истинного.

Некоторые природные единицы измерения можно получить и не из атомного мира, например, выбрав в качестве основных величин скорость света $c$ и гравитационную постоянную $\gamma$. Они дают столь же надежные эталоны, как $e$, $\hbar$ и $m$. Но из двух эталонов нельзя получить любые величины. Третий эталон берется произвольно.

Если оставить в стороне величину $c$, то в добавление к $\gamma$ понадобится два произвольных эталона. В качестве таких эталонов можно взять сантиметр и секунду, тогда грамм не понадобится. Ведь вместо него взята гравитационная постоянная, равная в системе СГС $6{,}7\cdot10^{-8}$ $\text{см}^3/\text{г}\cdot\text{с}^2$. Но теперь она принята за единицу, так что единицей массы стал не один грамм, а новая величина, равная $1/(6{,}7\cdot10^{-8})$ грамма, что, как легко убедиться, составляет примерно 15 тонн. Такая единица была бы удобна для оптовой торговли с представителями внеземных цивилизаций, если они согласятся выбрать в качестве двух других единиц сантиметр и секунду.

## Механика жидкостей и газов и теория подобия

Когда проектируют самолет или судно, сначала их рисует художник по замыслу конструктора, чтобы наметить общие пропорции. По такому рисунку выполняются более детальные чертежи и делаются расчеты. Но самые совершенные вычисления не могут предусмотреть всего — ведь новая конструкция должна обладать и новыми свойствами. Если сразу построить самолет или судно по чертежам и расчетам, то испытывать их будет слишком опасно и очень дорого обойдется доводка до серийного выпуска. Поэтому сначала делают уменьшенную модель, подобную проектируемому изделию, и испытывают в аэродинамической трубе или в бассейне для опытов с судами.

При каких условиях обтекание модели воздухом или водой будет подобно обтеканию оригинала? Иначе говоря, когда получится модель, а не просто игрушка, внешне похожая на предмет, пусть даже детально уменьшенная копия?

На основании учения о размерностях можно дать общий ответ на поставленный вопрос. Истинное динамическое подобие между объектом и моделью получится, когда отношения всех величин, входящих в уравнения движения газа или жидкости, одинаковы для натуры и для модели. Что же это за величины?

Так как модель геометрически подобна натуре, все ее размеры определяются одним-единственным размером. Если, например, в натуре размах крыльев самолета 50 *м*, а длина фюзеляжа 30 *м*, то модель с размахом крыльев 10 *м* должна иметь фюзеляж в 6 *м*. Тогда все сравнения достаточно производить с каким-то одним выбранным размером $d$.

Текущую жидкость или газ характеризует скорость $v$. При моделировании делают так, чтобы сама модель покоилась, а газ или жидкость на нее натекали. Все относительные скорости от этого не изменятся, а только они и важны для испытания динамических свойств. Достаточно производить сравнение с одной характерной скоростью, в качестве которой берется скорость натекания потока или скорость самого объекта (в натуре). С механической точки зрения не существенно, что именно выбрать. Кроме скорости, движущаяся среда характеризуется плотностью $\rho$, то есть массой единицы объема. Жидкости и газы различаются еще и по вязкости: вода течет легче растительного или смазочного масла, масло течет легче меда и т. п. Иначе говоря, течение зависит от особой характеристики среды, называемой *коэффициентом вязкости* $\eta$.

Выясним, какую размерность имеет $\eta$. Еще в прошлом веке Пуазейль экспериментально установил, что скорость, с которой жидкость протекает через узкий капилляр, прямо пропорциональна разности давлений $\Delta p$ (на разных концах капилляра), квадрату его радиуса $r$ и обратно пропорциональна длине капилляра $l$ и коэффициенту $\eta$. Запишем соответствующее уравнение для размерностей:

$$[v]=\left[\frac{\Delta p r^2}{\eta l}\right].$$

Отсюда размерность $\eta$

$$[\eta]=\left[\frac{\Delta p r^2}{v l}\right].$$

Но произведение $\Delta p r^2$ имеет размерность силы (давление — это сила, приходящаяся на единицу площади), так что

$$[\eta]=\left[\frac{mlt}{t^2 ll}\right]=\left[\frac{m}{lt}\right]=\frac{M}{LT}.$$

В системе СГС единица измерения коэффициента вязкости называется «пуазом» (по имени Пуазейля). Один пуаз — большая вязкость; например, у воды при комнатной температуре вязкость всего лишь 0,01 пуаза.

Итак, при равномерном движении объекта в среде его обтекание полностью задается четырьмя величинами $d$, $v$, $\rho$ и $\eta$. При данной форме обтекаемых тел картины течения полностью подобны, если безразмерные отношения размерных величин одинаковы. Но, оказывается, из четырех перечисленных размерных величин можно построить только одну безразмерную комбинацию. Она называется числом Рейнольдса и обозначается символом Re:

$$\mathrm{Re} = \frac{dv\rho}{\eta}.$$

(Здесь можно снова воспользоваться методом неизвестных показателей степени $x$, $y$, $z$, что и при выводе формулы (1).)

Два течения, обладающие одинаковыми числами Re, во всем подобны. (Строго говоря, это справедливо до тех пор, пока не надо учитывать сжимаемость среды, которая дает лишнюю постоянную в уравнениях движения. Так будет при скоростях, близких к скорости звука, но этот вопрос мы оставим в стороне). Заметим, что если можно построить несколько безразмерных отношений из величин, характеризующих течение, то динамическое подобие достигается только при равенстве всех отношений, не имеющих размерности. Действительно, только в этом случае два явления можно считать подобными и по заданным характеристикам одного явления можно получить характеристики другого простым пересчетом, подобно тому, как мы переходим от одной системы единиц к другой.

Для примера допустим, что испытываемая модель в 5 раз меньше натуры. Тогда надо либо обдувать ее со скоростью, впятеро большей, либо вместо воздуха взять газ, для которого отношение $\frac{\rho}{\eta}$ в 5 раз больше, чем для воздуха, либо поменять и скорость, и газ, но так, чтобы Re не изменилось. Таким образом, можно, в частности, измерить подъемную силу или сопротивление воздуха для модели самолета и пересчитать их для натуры. Определяются так же силы, действующие на отдельные точки самолета, что важно для расчетов на прочность.

Исходя из размерностей величин, можно показать, как производится пересчет с модели на объект. Из $d$, $v$, $\rho$ и $\eta$ величину с размерностью силы удается построить двумя способами:

$$F_1 = \rho v^2 d^2$$

и

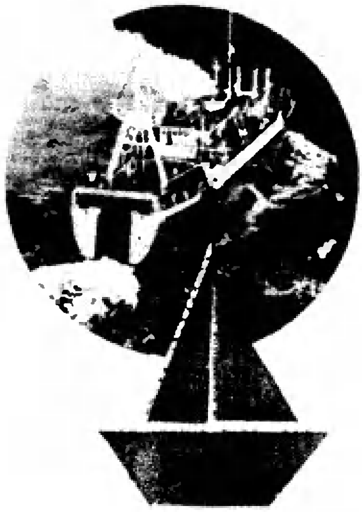
$$F_2 = d\eta v.$$

Какому из них отдать предпочтение? Возьмем отношение $\frac{F_1}{F_2}$:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{dv\rho}{\eta} = \mathrm{Re}.$$

Оказывается, это отношение равно числу Рейнольдса. Следовательно, если у модели и натуры числа Рейнольдса одинаковы, оба выражения для силы равноценны и можно пользоваться любым. Таким образом, сила, действующая на модель, во столько раз отличается от силы в натуре, во сколько раз отличаются произведения $dv\eta$ (или $\rho v^2 d^2$) для модели и для натуры.

На этом конкретном примере мы хотели показать, что теория размерностей лежит в основе моделирования.



# Метод размерностей

Н. Д. Кришталь

**В этой статье рассматриваются несколько задач, при решении которых используется метод размерностей. Об этом методе подробно рассказывается в статье А. С. Компанейца «Размерность физических величин и подобие явлений» в этом номере журнала.**

Удобнее всего продемонстрировать основные положения метода размерностей на конкретных примерах. Мы сделаем это, анализируя деформации и давления, возникающие при упругом взаимодействии двух тел. Абсолютная величина силы $F$, с которой тела сопротивляются внешнему воздействию, стремящемуся изменить их форму и размеры, определяется законом Гука:

$$F = kx, \qquad (1)$$

где $x$ — величина деформации, $k$ — коэффициент упругости. Для деформации растяжения (или сжатия) выражение (1) можно переписать в развернутом виде:

$$F = \frac{ES}{l}\Delta l. \qquad (2)$$

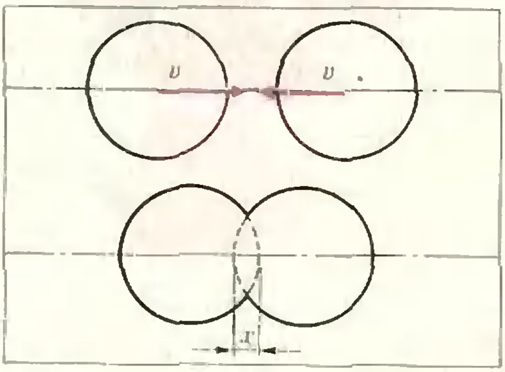



Рис. 1

Здесь $E$ — модуль упругости (модуль Юнга) — величина, характеризующая способность материала сопротивляться внешнему воздействию, она не зависит от формы и размеров исследуемого образца, $S$ — площадь сечения, перпендикулярного к направлению действующей извне силы, $l$ — длина и $\Delta l$ — изменение длины деформируемого тела.

Рассмотрим упругое соударение шариков.

Задача 1. *Два шарика радиусом $R$, изготовленные из материала с плотностью $\rho$ и модулем упругости $E$, двигаются навстречу друг другу по прямой, соединяющей их центры, с одинаковыми по величине скоростями $v$ (рис. 1). Между шариками происходит абсолютно упругий удар. Найти максимальную величину деформации $x$ во время удара.*

Очевидно, что величина $x$ может зависеть от всех параметров, характеризующих шарики в процессе удара, то есть от $v$, $\rho$, $R$ и $E$:

$$x = x(v,\ \rho,\ R,\ E).$$

Будем искать эту зависимость в виде *)

$$x = Av^p \rho^b R^c E^d, \qquad (3)$$

где $A$ — безразмерный коэффициент пропорциональности ($[A] = 1$), $p$, $b$, $c$ и $d$ — неизвестные пока безразмерные показатели степени.

Согласно учению о размерностях формулы размерностей левой и правой частей равенства (3) должны быть одинаковыми:

$$[x] = [v^p]\,[\rho^b]\,[R^c]\,[E^d]. \qquad (4)$$

Это налагает определенные условия на значения показателей $p$, $b$, $c$ и $d$. Выпишем размерности всех величин, стоящих в обеих частях равенства (3).

Длина — это основная единица измерения, поэтому сразу запишы-

*) Представление искомой зависимости в виде степенной функции является допущением, справедливость которого нужно доказать. При строгом использовании метода размерностей такое допущение не делается.

ваем

$$[x] = L, \ [R] = L.$$

Отсюда следует, что объемы и площади имеют размерности $L^3$ и $L^2$. По определению скорость характеризует путь, проходимый в единицу времени, значит,

$$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}.$$

Плотность материала — это количество вещества в единице объема, следовательно,

$$[\rho] = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}.$$

Размерность модуля упругости можно установить, воспользовавшись законом Гука и II законом Ньютона. Из формулы (2) следует, что

$$E = \frac{F}{S}\frac{l}{\Delta l}.$$

По II закону Ньютона сила равна массе, умноженной на ускорение:

$$F = ma.$$

Значит,

$$E = \frac{ma}{S}\frac{l}{\Delta l}. \qquad (5)$$

Ускорение — это изменение скорости в единицу времени, поэтому

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = LT^{-2}.$$

Размерности остальных величин, входящих в уравнение (5), можно выписать сразу:

$$[m] = M, \quad [S] = L^2,$$
$$[l] = [\Delta l] = L.$$

Следовательно,

$$[E] = \frac{MLT^{-2}}{L^2}\frac{L}{L} = ML^{-1}T^{-2}.$$

Подставим размерности соответствующих величин в равенство (4):

$$L = (LT^{-1})^p (ML^{-3})^b (L)^c (ML^{-1}T^{-2})^d,$$

или

$$L^1 = L^{p-3b+c-d} M^{b+d} T^{-(p+2d)}. \quad (6)$$

Формулы размерностей левой и правой частей одинаковы, если равны показатели степени у одинаковых символов в левой и правой частях. Перепишем уравнение (6) в виде

$$L^1M^0T^0 = L^{p-3b+c-d}M^{b+d}T^{-(p+2d)}.$$

Приравнивая показатели степени при одинаковых символах в левой и правой частях, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = p-3b+c-d, \\ 0 = b+d, \\ 0 = p+2d, \end{cases}$$

из которой находим

$$c = 1, \ b = \frac{p}{2}, \ d = -\frac{p}{2}.$$

Подставим эти значения в (3):

$$x = Av^p \rho^{p/2} E^{-p/2} R,$$

или

$$\frac{x}{R} = A\left(\frac{\rho^{1/2}v}{E^{1/2}}\right)^p = A\left(\frac{\rho v^2}{E}\right)^{p/2}. \qquad (7)$$

Полученное выражение определяет вид уравнения для относительной деформации $\frac{x}{R}$ шариков. При этом $A$ и $p$ по-прежнему неизвестны.

Сравнивая выражения (3) и (7), можно заметить, что рассмотрение размерностей величин позволило заменить соотношение между пятью размерными величинами ($x$, $v$, $\rho$, $R$, $E$) соотношением между двумя безразмерными величинами:

$$\left[\frac{x}{R}\right] = 1, \quad \left[\frac{\rho v^2}{E}\right] = 1.$$

Если бы мы искали зависимость $x = x(v, \rho, R, E)$ с помощью эксперимента, то использование метода размерностей позволило бы исследовать вместо влияния на $x$ четырех размерных величин влияние только одной безразмерной величины $\frac{\rho v^2}{E}$ на $\frac{x}{R}$. Это дает большие удобства экспериментатору, так как позволяет намного уменьшить число необходимых опытов.

Следует обратить внимание на то, что коэффициент $A$ невозможно определить методом размерностей, поскольку он никак не связан с показателями степени в формулах размерностей величин. Показатель $p$ связан формулами размерностей, поэтому в некоторых случаях его можно определить. Попробуем выделить случаи, когда это можно сделать.

В нашей задаче четыре неизвестных показателя $p$, $b$, $c$, $d$ и три уравнения для их определения. Число уравнений, которые можно составить для отыскания неизвестных коэффициентов, равно числу основных единиц измерений. Для определения численных значений всех неизвестных показателей необходимо, чтобы их число было равно числу независимых уравнений в системе. Это возможно только в двух случаях: если выбрать систему единиц измерений с четырьмя основными единицами или если обоснованно уменьшить число независимых переменных (а значит, и число неизвестных показателей).

Мы рассмотрим второй путь. Предположим, что возникающая при ударе деформация зависит только от модуля упругости $E$ и от кинетической энергии шара $K=\frac{mv^2}{2}$, где $m$ — масса шара. Здесь мы учитываем размер шара только в выражении для кинетической энергии: $K=\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3\rho v^2$. (Это грубое допущение, потому что величина деформации зависит не только от кинетической энергии, но и от радиуса шара $R$.) Такое допущение позволяет приближенно записать:

$$x = A_1 K^{p_1} E^{b_1}.$$

Размерность кинетической энергии

$$[K] = [mv^2] = ML^2T^{-2}.$$

Если теперь составить систему уравнений и определить значения $p_1$ и $b_1$ (аналогично тому, как это было сделано выше), то получим

$$\frac{x}{R} = \frac{A_1}{R}\left(\frac{K}{E}\right)^{1/3} = A_2\left(\frac{\rho v^2}{E}\right)^{1/3}. \qquad (8)$$

Показатель степени $^1/_3$ в формуле (8) близок к показателю степени $^2/_5$, полученному при строгом математическом решении задачи *).

*) Еще об одном способе получения формулы (8) см., например, статью Г. Л. Коткина «Столкновение шариков», «Квант», 1973, № 3.

При использовании метода размерностей очень важно правильно сформулировать задачу, потому что формулировка задачи выделяет те параметры, от которых зависит искомая величина. Решая задачу об упругом соударении шаров, мы учли способность материала шаров сопротивляться распространению деформации внутри шара ($E$), форму и размер исследуемой области (шары радиуса $R$), внешнее воздействие на исследуемую область (через скорость $v$ и плотность материала каждого шара $\rho$).

З а д а ч а 2. *Найти деформацию, возникающую в шарах радиуса $R$ при действии на них двух сжимающих сил $F$, направленных по линии, соединяющей центры шаров. Материал шаров одинаков, и его модуль упругости $E$.*

Здесь нам, как и в первой задаче, известны форма и размеры объектов (шары радиуса $R$), внешнее воздействие на шары (силы $F$) и свойства материала шаров (модуль Юнга $E$).

Для решения задачи нам нужно найти зависимость величины деформации $x$ от величин $F$, $R$ и $E$. Будем опять искать эту зависимость в виде

$$x = A_3 F^n R^s E^t, \qquad (9)$$

или для размерностей

$$[x] = [F^n]\,[R^s]\,[E^t]. \qquad (10)$$

Размерность силы $F$ равна

$$[F] = [ma] = MLT^{-2}.$$

Подставив размерности величин $x$, $F$, $R$, $E$ в (10), получим

$$L = (MLT^{-2})^n L^s (ML^{-1}T^{-2})^t,$$

или

$$L^1M^0T^0 = L^{n+s-t}M^{n+t}T^{-2n-2t}.$$

Приравняем показатели степени при одинаковых символах в левой и правой частях этого уравнения:

$$\begin{cases} 1 = n + s - t, \\ 0 = n + t, \\ 0 = -2n - 2t. \end{cases}$$

Отсюда

$$t = -n, \quad s = 1 - 2n.$$

Следовательно,

$$x = A_3 F^n R^{1-2n} E^{-n} = A_3 R\left(\frac{F}{ER^2}\right)^n.$$

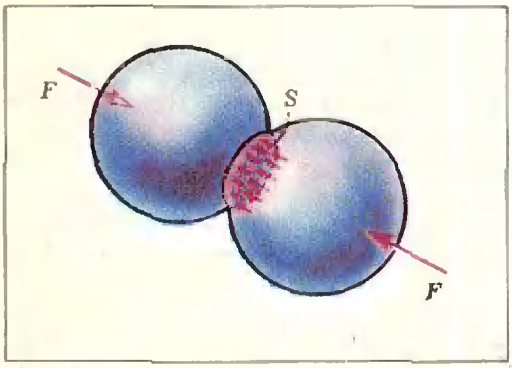



Рис. 2.

или

$$\frac{x}{R} = A_3 \left(\frac{F}{ER^2}\right)^n. \qquad (11)$$

В общем случае внешнее воздействие на шары изменяет состояние материала шаров. Это изменение состояния материала характеризуют понятием «напряжение». Напряжением материала в сечении $S$ (рис. 2) под действием внешних сил $F$ называется величина $\sigma = F/S$, где $S$ — площадь сечения. Напряжение, возникающее под действием сил, направленных перпендикулярно к рассматриваемому сечению, называется нормальным напряжением или давлением. Напряжение характеризует удельную нагрузку на материал (нагрузку на единицу площади сечения тела). При увеличении удельных нагрузок материал сначала становится неупругим, а потом разрушается. Поэтому определение напряжений представляет практический интерес.

З а д а ч а 3. *Найти напряжение $\sigma$ в месте соприкосновения двух шаров радиуса $R$, возникающее под действием сжимающих сил $F$ (см. рис. 2), если шары изготовлены из материала с модулем упругости $E$.*

Очевидно, что $\sigma$ зависит от $F$, $E$ и $R$:

$$\sigma = \sigma(F, E, R).$$

Будем снова считать, что эта зависимость имеет вид

$$\sigma = A_4 F^{n_1} R^{s_1} E^{t_1}. \qquad (12)$$

Из определения напряжения следует, что размерность напряжения — это размерность силы, поделенная на размерность площади:

$$[\sigma] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}.$$

Следовательно, учитывая (12),

$ML^{-1}T^{-2} = (MLT^{-2})^{n_1} L^{s_1} (ML^{-1}T^{-2})^{t_1}$,

откуда

$$\begin{cases} 1 = n_1 + t_1, \\ -1 = n_1 + s_1 - t_1, \\ -2 = -2n_1 - 2t_1. \end{cases}$$

Проделав соответствующие выкладки, получаем

$$\sigma = A_4 F^{n_1} R^{-2n_1} E^{1-n_1},$$

или

$$\frac{\sigma}{E} = A_4 \left(\frac{F}{ER^2}\right)^{n_1}. \qquad (13)$$

Заметим еще раз, что метод размерностей широко используют в тех задачах, где из-за большого числа переменных и сложности уравнений, описывающих явление, аналитическое решение невозможно. В этом случае для отыскания нужных зависимостей проводят эксперимент. Результаты эксперимента обрабатывают с помощью безразмерных комбинаций параметров задачи, которые позволяет выделить метод размерностей. Так, в задачах, рассмотренных в этой статье, метод размерностей позволяет утверждать, что относительные деформации и напряжения определяются не отдельными численными значениями параметров $v$, $\rho$, $E$, $R$ или $F$, $E$, $R$, а численным значением безразмерных комбинаций параметров $\frac{\rho v^2}{E}$ и $\frac{F}{ER^2}$.

У п р а ж н е н и я

1. Показать, что напряжение, возникающее в шарах, движущихся навстречу друг другу со скоростью $v$, в момент столкновения определяется выражением

$$\frac{\sigma}{E} = A\left(\frac{\rho v^2}{E}\right)^n.$$

2. Показать, что при столкновении двух шаров с радиусами $R_1$ и $R_2$ напряжение в месте соприкосновения описывается формулой

$$\frac{\sigma}{E} = A\left(\frac{\rho v^2}{E}\right)^n \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^r.$$

# Оценка физической величины

Б.С. Ратнер

В физике, как, впрочем, и в других науках, значения различных величин, получаемые в результате расчетов или экспериментов, определяются с неодинаковой точностью. В одних случаях значение физической величины важно знать с наибольшей точностью, в других случаях достаточно оценить ее примерное значение. Точность подобных оценок может изменяться от порядка величины до нескольких процентов.

В качестве примера оценочного, неточного расчета найдем период колебаний $T$ математического маятника несколько необычным способом. Из школьного курса физики известно, что для малых углов отклонения нити маятника от вертикали величина $T$ находится с большой точностью из формулы $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где $l$ — длина нити маятника и $g$ — ускорение свободного падения. Наш пример поэтому носит характер чисто иллюстративный — никто в реальных условиях не станет приблизительно оценивать величину, уже известную точно. Зато мы сразу будем знать, насколько близка к истине полученная оценка.

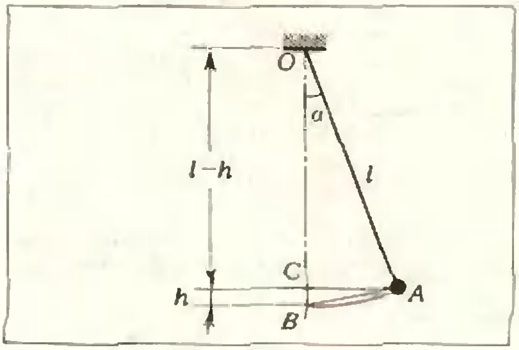



Рис. 1.

Пусть в начальный момент маятник находится в точке $A$ — точке максимального удаления от положения равновесия $B$, при этом нить составляет с вертикалью малый угол $\alpha$ (рис. 1). Период колебаний $T$ — это учетверенный промежуток времени $t$, за который маятник опишет дугу $AB$:

$$T = 4t = 4\frac{\smile AB}{v_{ср}},$$

где $v_{ср}$ — средняя скорость на этом участке.

Так как угол $\alpha$ мал, дугу $\smile AB$ можно заменить хордой $AB$. Из прямоугольных треугольников $ACO$ и $ACB$

$$AC^2 = l^2 - (l-h)^2$$

и

$$AC^2 = AB^2 - h^2,$$

следовательно,

$$AB = \sqrt{2lh}.$$

Предположим, что

$$v_{ср} = \frac{v_0 + v_l}{2} = \frac{0 + \sqrt{2gh}}{2}.$$

Здесь $v_0$ — скорость в начальный момент времени, а $v_l$ — скорость маятника при прохождении положения равновесия. Неточность такого предположения очевидна, так как оно соответствует равноускоренному движению, то есть движению под действием постоянной силы. В нашем же случае на шарик действует переменная по времени сила — тангенциальная составляющая силы тяжести. К сожалению, более близкое к истинному значение $v_{ср}$ с помощью элементарной математики получить нельзя.

Подставим значения для $\smile AB$ и $v_{ср}$ в выражение для периода колебаний $T$ и получим

$$T = 8\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

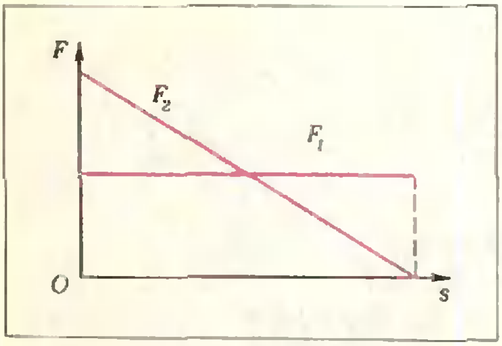



Рис. 2.

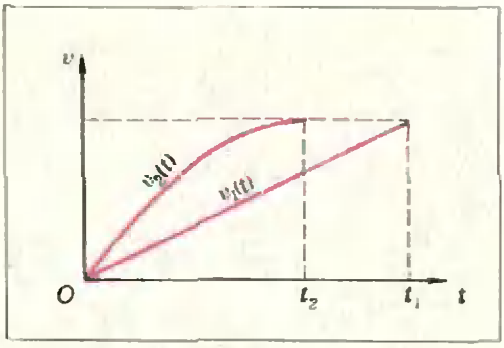



Рис. 3.

Значение периода колебаний, полученное путем оценки, примерно на 27% больше истинного. Чем вызвано такое расхождение? В основном, выбранным нами значением средней скорости, замена дуги хордой малосущественна. На рисунке 2 показаны графики зависимости силы от перемещения для двух случаев: гармонического колебания, когда сила $F_2$ линейно уменьшается по мере приближения к положению равновесия, и использованного при оценке равноускоренного движения, когда сила $F_1$ постоянна. Площади под графиками, равные энергии движения, естественно должны быть равны. Попробуем теперь сравнить промежутки времени, затрачиваемые в обоих случаях. Воспользуемся для этого зависимостью $v = v(t)$ (рис. 3). *При равноускоренном движении* график $v = v_1(t)$ — прямая линия. При гармоническом колебании кривая $v = v_2(t)$ вначале идет выше (тангенс угла наклона кривой при $t = 0$ в два раза больше тангенса наклона прямой), в середине пути наклоны кривых примерно одинаковы, а в конце тангенс угла наклона кривой $v_2(t)$ равен нулю. Но площади под обеими кривыми должны быть равны, так как равны пути. Следовательно, $t_1 > t_2$, что соответствует знаку расхождения в значении периода колебаний.

---

## Случай на олимпиаде

*Только что закончилась* школьная олимпиада. Всегда самой легкой задачей бывает первая, но в этот раз начались споры даже из-за ответа. В условии первой задачи было сказано: *Найти все значения параметра $a$, при которых уравнение $x^2 - |x| + a = 0$ имеет единственный корень.*

— Я решал задачу так,— сказал ученик Крестиков. — Известно, что $x^2 = |x|^2$, поэтому вместо данного уравнения можно написать такое:

$$|x|^2 - |x| + a = 0.$$

Так как оно квадратное относительно $|x|$, то единственный корень может быть только в случае, когда дискриминант равен нулю, то есть при $a = \frac{1}{4}$. Значит, $a = \frac{1}{4}$.

— Вовсе нет,— сказал ученик Нуликов.— Смотри, как решал я. Пусть данное уравнение имеет корень $x_0$. Ясно, что $-x_0$ тоже будет его корнем. А для того чтобы корень был единственный, необходимо, чтобы $x_0 = -x_0$. Это возможно только при $x_0 = 0$. Подставив это значение $x$ в уравнение, видим, что $a = 0$, а не $\frac{1}{4}$!

— Вы оба не довели решение примера до конца,— *сказал ученик Квадратиков.*— Надо было еще...

— Ничего уже не надо,— безапелляционно заявил ученик Треугольников.— Все и так ясно.

Попробуйте ответить на такие вопросы.

1. Чей ответ верен?
2. Что имел в виду Квадратиков?
3. Что ясно Треугольникову?

*В. И. Рыжик*


# С чего начинается логика?

Ю. А. Гастев

1. Все люди смертны. (I)
2. Сократ — человек.
3. Следовательно, Сократ смертен.

Таким примером *силлогизма* (на более понятном языке — *умозаключения*) начинался в свое время почти каждый учебник логики. «Ну, что ж, все верно, — скажет сегодняшний школьник, никакой такой специальной логики не проходящий. — Невелика, однако ж, наука: больно просто все».

Не торопитесь!

Вот вам еще пример (в замечательное пьесе Эжена Ионеско «Носороги» его изрекает малоприятный персонаж, так и именуемый: «логик»):

1. Все кошки смертны.
2. Сократ смертен. (II)
3. Следовательно, Сократ — кошка.

«Ну что за вздор, — скажете вы, — какая же он кошка?» Но разве *этим* плох «силлогизм» «логика»?!

Оцените, пожалуйста, еще два примера:

1. Все кошки смертны.
2. Сократ — кошка. (III)
3. Следовательно, Сократ смертен.

1. Все люди смертны.
2. Сократ смертен. (IV)
3. Следовательно, Сократ — человек.

Так какой же из примеров «вздор»? (III), где опять повторяется чушь про кошку? Ничего подобного! Неверно как раз умозаключение (IV), в котором все *по отдельности* верно: и *посылки* 1 и 2, и *заключение* 3, — но заключение вовсе *не следует* из посылок! И этим же — с интересующей нас сейчас точки зрения — умозаключение (II) отличается от (I).

Итак, логику интересуют не столько сами по себе истинность и ложность отдельных утверждений, сколько прежде всего связь между различными утверждениями, законы (правила), согласно которым из одних истинных утверждений можно с полной уверенностью получать новые истинные утверждения, то есть, как говорят, *нормы правильных рассуждений*.

Так, значит, логика все-таки не безразлична к вопросу об *истинности?* Конечно, нет. Это вообще, по существу, важнейший для нее вопрос. Но, в отличие от обычной разговорной практики, мы будем всегда стремиться к максимальной точности и потому вынуждены будем различать несколько видов истинности (соответственно ложности).

Так называемая *фактическая истинность* предложений, понимаемая как «соответствие действительности», принимается в логике без всякого обсуждения и без заинтересованности к способу удостовериться в ней. То, что Волга впадает в Каспийское море, истинно, но истинно чисто фактически, и дело географии, а не логики, гарантировать эту истинность. Высказывания «Волга впадает в озеро Мичиган» и «Амазонка впадает в Клязьму», конечно, ложны — но опять-таки чисто фактически: ни из каких «законов логики» это вовсе не вытекает. Суждения же «Если Волга впадает в Каспийское море, то Волга впадает в Каспийское море», «Если Волга впадает в озеро Мичиган, то Волга впадает в озеро Мичиган» и «Если Амазонка впадает в Клязьму, то Амазонка впадает в Клязьму» — все три в равной мере — *логически истинны*, то есть истинны, так сказать, исключительно в силу своей структуры, независимо от истинности или ложности их посылок и заключений. Истинность законов Ньютона или закона Кулона удостоверяет опыт, но никак не логика, из которой вовсе не вытекает ни одна из конкретных физических закономерностей. Умозаключение «Греки — люди, Сократ — грек, следовательно, Сократ — человек», напротив, правильно само по себе, а отнюдь не в силу истинности первой посылки, удостоверяемой всемирной историей, или второй, констатирующей некоторый факт истории философии.

Строго говоря, предыдущая фраза весьма условна: просто мы в данном случае молчаливо соглашаемся иметь в виду *именно того* Сократа, а не, скажем, тестя Чернышевского (жену Николая Гавриловича звали Ольгой Сократовной) или кота по кличке «Сократ» (в последнем случае умозаключение (II) не стало бы, разумеется, более законным, но вот в верном умозаключении (III) обе посылки оказались бы истинными). Таким образом, фактическая истинность высказываний часто зависит от ряда дополнительных (не всегда высказываемых явно) соглашений и условий, вследствие чего в таких случаях иногда говорят о *возможной истинности* — в отличие от *необходимой истинности* утверждений типа «12 делится на 3 или нет» и «12 делится на 5 или нет», истинных безотносительно к нашим арифметическим познаниям и даже к тому, в какой системе счисления записаны числа 12, 3 и 5.

Таким образом, *логические истины* — в отличие от опытных, фактических истин конкретных наук и повседневной практики — *не несут нам никакой информации о реальном мире*. Как говорил Лейбниц, это *истины во всех возможных мирах*. Поэтому их называют также *всегда истинными*, или *тождественно истинными* высказываниями. Или еще короче и выразительнее: *тавтологиями*. Так (буквальный перевод с греческого: «то же самое слово») называют в обыденной речи бессодержательные повторения, не сообщающие нам ничего нового. Присмотритесь к логически истинным предложениям вроде «Из $A$ следует $A$», «$B$ верно или $B$ неверно», «Если истинны высказывания $C$ и $D$, то истинны высказывания $D$ и $C$» и т. п., — и вы согласитесь, что термин очень нагляден и уместен.

Не все тавтологии (в логическом смысле этого слова) так уж непосредственно очевидны — иногда их логическую истинность не сразу удается усмотреть из-за чисто внешней сложности, громоздкости их строения. Скажем, высказывание «Если из *А* следует *Б*, из *В* следует *Г*, из *Д* следует *Е*, из *Ж* следует *З*, из *И* следует *К*, из *Л* следует *М*, из *Н* следует *О*, из *П* следует *Р*, из *С* следует *Т*, из *У* следует не-*Ф*, из *Х* следует *Ц*, из *Ч* следует *Ш*, из *Щ* следует *Э*, а из *Ю* следует *Я*, то не-*Б* влечет не-*А*, не-*Г* влечет не-*В*, не-*Е* влечет не-*Д*, не-*З* влечет не-*Ж*, не-*К* влечет не-*И*, не-*М* влечет не-*Л*, не-*О* влечет не-*Н*, не-*Р* влечет не-*П*, не-*Т* влечет не-*С*, *Ф* влечет не-*У*, не-*Ц* влечет не-*Х*, не-*Ш* влечет не-*Ч*, не-*Э* влечет не-*Щ*, а не-*Я* влечет не-*Ю*» тавтологично в той же мере, что и примеры предыдущего абзаца, но проверить это обстоятельство — дело достаточно канительное. Здесь ситуация в точности та же, что в школьной арифметике: пример, требующий произвести тридцать три арифметических действия, ничуть «в принципе» не сложнее, чем пример на одно-два умножения — но кто из нас не помнит, насколько в первом случае вероятнее ошибиться.

Нельзя ли в вопросе о правильности умозаключений и логической истинности высказываний достичь такого же «уровня беглости», как при выполнении и проверке обычных арифметических операций, сколь угодно сложные нагромождения которых нас теперь совсем не пугают? Можно. И именно выявление правил, обеспечивающих такую «беглость», составляет первейшую задачу логики как науки. Опять — все как в арифметике и алгебре: задача не в том, чтобы научиться «автоматически» (то есть без специальных раздумий) складывать $2+3$, $3+5$ или даже $678\,930\,567+809\,376\,542$ и т. п., а именно $a+b$ для *произвольных* $a$ и $b$.

Для алгебры и арифметики два выражения, имеющие одну и ту же форму (см. предыдущий абзац), в определенном смысле равноправны — даже если они и имеют разные «величины». Точно так же, если мы хотим «алгебраизировать» логику, мы должны полностью отвлечься от *содержания* высказываний (изучение которого, как мы уже видели, как правило, вообще не имеет никакого отношения к логике), строя весь наш анализ исключительно на основе их *формы*. *Именно в уяснении этого обстоятельства и состояла, собственно говоря, гениальная идея «отца логики» Аристотеля, и именно потому логику как науку **) называют *формальной*.

Но что такое *форма предложения* (высказывания)? Если высказывания или отдельные их «элементарные части» обозначаются, как это принято в современной логике, (подобно обычной алгебре) буквами, то тождество (или различие) их формы усмотреть обычно нетрудно. Скажем, предложения «Из *А* и *В* вытекает *А*» и «Из *С* и *F* вытекает *С*», отличающиеся лишь обозначением «компонент», естественно считать равноправными, чего никак нельзя утверждать (во всяком случае, без дополнительных уточнений и соглашений), например, о предложениях «Из *Х* следует *У*» и «Из не-*У* следует не-*Х*». Но когда мы сравниваем предложения обычного языка, дело обстоит не всегда так просто. Например, явно одну и ту же форму имеют умозаключения (I), (III), а также следующие рассуждения:

1. Все целые числа рациональны.
2. 7 — целое число. (V)

3. Следовательно, 7 — рациональное число.

---

* Пока разговор идет на уровне метафор и сравнений, нет беды в том, что многие термины не имеют точного, вполне определенного значения; на это, в частности, указывают кавычки. Когда же нам нужны точные термины, мы вводим их с помощью определений или поясняющих примеров и выделяем *курсивом*.

**) Не надо забывать, что слово «логика» употребляется в обыденной речи и во многих других смыслах, обычно не уточняемых и в данной статье нас не интересующих.

1. Все целые числа рациональны.
2. $\pi$ — целое число. (VI)
3. Следовательно, $\pi$ — рациональное число.

1. Все тигры полосаты.
2. Шер-Хан — тигр. (VII)
3. Следовательно, Шер-Хан полосат.

и т. п. — все они имеют «общий вид»

1. Все $x$ обладают свойством $P$.
2. Предмет $y$ есть $x$. (VIII)
3. Следовательно, $y$ обладает свойством $P$.

Но что вы скажете о следующей серии примеров*)

1. Колумб открыл Америку.
2. На стене висит портрет Колумба. (IX)
3. Следовательно, на стене висит портрет открывателя Америки

1. Пушкин написал «Евгения Онегина».
2. На стене висит портрет Пушкина. (X)
3. Следовательно, на стене висит портрет автора «Онегина».

1. Булат Окуджава написал «Гамлета».
2. На стене висит портрет Окуджавы. (XI)
3. Следовательно, на стене висит портрет автора «Гамлета».

1. Малюта Скуратов создал теорию относительности.
2. На стене висит портрет Малюты. (XII)
3. Следовательно, на стене висит портрет создателя теории относительности.

Пока все в точности одинаково, не правда ли? (Вам, конечно, уже ясно, что нам незачем здесь обсуждать вопрос об авторстве «Гамлета», «Онегина» и теории относительности.) А нельзя ли еще в эту же группу отнести и такой «силлогизм»:

1. Какой-то человек изобрел самовар.
2. На стене висит портрет какого-то человека. (XIII)
3. Следовательно, на стене висит портрет изобретателя самовара.

*) Навеянной (как и вообще бо́льшая часть настоящего изложения) введением к книге А. Чёрча «Введение в математическую логику», т. 1, перевод с английского, М., ИЛ, 1960.

Вот вам и «тождество формы!» (А ведь «формально», казалось бы, здесь все как в примерах (I), (III), (V)—(VIII) — кто может помешать нам, как и раньше, обозначить подлежащие в посылках и заключениях через $x$ и $y$?)

Конечно, никакой тут «загадки» нет — вы сами легко объясните, что в русском языке собственные существительные и существительные нарицательные с неопределенными местоимениями в роли подлежащих далеко не равноправны (а в английском, французском и вообще во всех германских и романских языках подобные недоразумения возникнуть не могут при правильном употреблении определенных и неопределенных артиклей). Но мне бы хотелось обратить ваше внимание не только, на простоту и естественность постановки задач формальной логики но и на то, что подлинная ее «формализация» может быть затруднена как раз теми качествами нашего разговорного языка, которые делают его таким удобным, богатым и гибким средством общения между людьми: обилием смысловых оттенков слов и отсутствием жесткой, «стандартной» структуры (формы) предложений.

В современной формальной логике *) затруднения эти преодолеваются использованием специальных *формализованных языков*. В этих языках, как можно прочесть во множестве популярных книжек, все неточности и двусмыслености обычных разговорных языков тщательно изгоняются (разумеется, язык при этом обедняется — но мы и не собираемся писать на нем обычную хорошую прозу, не говоря уже о стихах). Но, с другой стороны, во всех существенных чертах своей структуры эти формализованные языки следуют хорошо нам всем известным законо-

*) Часто (по очевидным мотивам) называемой *символической логикой*, или *математической логикой*.

мерностям обычных «человеческих» языков. Мне особенно хотелось бы подчеркнуть это обстоятельство, часто оставляемое в тени авторами популярных книг, подчас слишком настойчиво *противопоставляющих* языки естественные и искусственные: непонимание глубокого родства этих групп языков (при всем их очевидном различии) очень затрудняет усвоение самых начальных, «азбучных» понятий современной логики.

Рассмотрение этой «азбуки логики» очень напоминает, как вы сами увидите, синтаксис и морфологию обычного русского (или какого-либо другого) языка. Отчасти поэтому термином *«синтаксис»* часто вообще обозначают изучение *формы* (структуры) формализованных языков. Понятия эти распадаются на две основные группы, первая из которых очень близко соответствует хорошо знакомому вам из школы «разбору по членам предложения». Другая часть синтаксиса формализованных языков очень похожа на ту часть школьной грамматики, которая посвящена вопросу образования (построения) сложных предложений из простых. В отличие от привычной вам схемы изучения грамматических понятий, оказывается более удобным начать со второй группы понятий — она более проста и элементарна, так что ее легко рассматривать независимо от первой. Более того, принято строить специальный язык, соответствующий этой группе грамматических категорий. Этот язык, основной «атомарной» единицей которого служит *высказывание* — то есть предложение, относительно которого имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно, — так и называется: *исчисление высказываний*. Никакого «разбора по членам предложения» в исчислении высказываний нет — по той простой причине, что внутренняя структура предложений = «атомов» здесь вообще не рассматривается: «атомы» пока считаются «неделимыми».

Следующий этап в теории формализованных языков, на котором, напротив, уже интересуются «строением атома» и только с помощью которого нам удастся — но не в этот раз — завершить анализ приведенных выше формальных примеров (I) — (XIII), — это так называемое *исчисление предикатов*. Исчисление предикатов обычно строится так, что оно включает в себя исчисление высказываний; точно так же при изучении структуры атома в физике и химии нам незачем забывать, что мы узнали раньше о связи атомов между собой.

Итак, исчисление высказываний. Повторяю: высказывание — это любое предложение (естественного или формализованного языка — безразлично), о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Именно говорить, точнее даже — спрашивать — но вовсе не отвечать. У самой *логики*, как мы уже не раз говорили, попросту *нет средств для ответа на* многие *такие вопросы* (хотя и не на все): логика (исчисление высказываний) готова считаться как с фактом, что высказывания «Волга впадает в Каспийское море» и «$2 \times 2 = 4$» истинны, а высказывания «Волга впадает в Индийский океан» «$2 \times 2 = 5$» ложны. Но ее выводы никак не зависят от этих фактов и остались бы верными, если геологическая катастрофа изменила бы течение Волги или если бы мы изменили привычные написания цифр, условных, как и всякие обозначения.

Более того, логика высказываний (так часто говорят вместо «исчисление высказываний») может вполне обойтись (и фактически обходится) без ответа на вопросы *что такое* «истина» и *что такое* «ложь». Вместо этого достаточно бывает говорить просто о двух различных *значениях истинности* (или *истинностных значениях*), не задаваясь вопросом «а что это значит». Одно из этих значений принято называть «выделенным» и обозначать через «и» (от «истина»), «*t*» (от «true») или, например, просто «1» (без всяких «естественных аналогий» с обычной логической интуицией), а второе — «невыделенное» —

через «л» («ложь»), «f» («falce») или «0». Каждое высказывание, как и высказывания, из которых оно состоит (и от которых, в зависимости от способа их соединения, зависит его значение), может принимать два различных значения, вовсе не обязательно называемые «истиной» и «ложью» и ассоциируемые с этими понятиями. Таким образом, исчисление высказываний можно понимать как *«алгебру логики»* — исследование функций, принимающих, так же как и их аргументы, два различных значения. Эти значения можно (но, повторяем, вовсе не обязательно) называть истиной и ложью. Если мы не только принимаем эти наименования, но и интересуемся их связью с «обычными» понятиями истины и лжи (и пытаемся уточнить их), то мы занимаемся *семантикой*.

В противном случае мы, оставаясь в рамках чистого *синтаксиса*, можем вообще спокойно забыть о происхождении нашей «логической» терминологии. Такое «чистое» исчисление высказываний есть попросту раздел *комбинаторики*, и «логические задачи», рассматриваемые в нем, ничем, в принципе, не отличаются от обычных комбинаторных задач.

Итак, кроме самих по себе высказываний, исчисление высказываний изучает различные функции между ними — различные способы образования «сложных» высказываний из «простых». В рамках семантики эти функции очень напоминают обычные союзы русского (или любого другого) языка, с помощью которых сложные предложения строятся из простых. Но эту связь с обычным языком (и с «обычной логикой») мы отложим до следующего разговора. Поэтому мы закончим нашу статью тем, чем обычно подобные статьи начинаются: определением нескольких «основных» таких функций, или, как их называют, *логических операций*.

Поскольку речь идет о функциях, принимающих, как и их аргументы, конечное число значений (а именно два), мы сможем задать интересующие нас функции явным указанием на то, какие именно значения они принимают при всевозможных распределениях значений аргументов («простых составляющих высказываний»). Такие задания-определения удобно представлять в виде так называемых *истинностных таблиц*, на «входах» которых указаны значения исходных высказываний, а на «выходах» (в клетках самой таблицы) — значения результирующего высказывания.

Вот эти логические операции.

1) *Отрицание* истинного высказывания ложно, а отрицание ложного высказывания истинно. Это, обозначаемая символом «$\neg$» операция, соответствующая частице «не» в русском языке, задается следующей истинностной таблицей:

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| и | л |
| л | и |

2) *Конъюнкция* двух истинных высказываний (соответствующая союзу «и» между ними, обозначение — $\wedge$) истинна, если же хоть одно из них ложно — ложна:

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| и | и | и |
| и | л | л |
| л | и | л |
| л | л | л |

3) *Дизъюнкция* двух высказываний (обозначение — $\vee$, читается как «или») истинна, если истинно хотя бы одно из них, и ложна, если оба они ложны:

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| и | и | и |
| и | л | и |
| л | и | и |
| л | л | л |

*(Окончание см. с. 35)*

А. М. Лопшиц

# Функциональные уравнения

Прежде чем начать чтение этой статьи, вам нужно убедиться, что вы хорошо владеете важным математическим понятием «функция». Поэтому мы советуем прочитать статью А. Н. Колмогорова *) и те страницы школьных учебников, в которых это понятие вводится и разъясняется.

Напомним, что для задания функции от вещественного аргумента, значения которой также являются вещественными числами (только такие функции мы будем рассматривать в нашей статье), следует: 1) раньше всего указать «область ее определения», то есть указать то множество вещественных чисел, из которого будут выбираться значения $x$ аргумента, и 2) отчетливо сформулировать правило, по которому для каждого такого значения $x$ будет построено соответствующее ему вещественное число — его называют: значение функции, соответствующее выбранному значению аргумента. Если какая-либо функция обозначена символом, скажем, $\Phi$, то значение, которое она принимает для выбранного значения $x$ аргумента, обозначают $\Phi(x)$.

Каждой рассматриваемой функции (каждому правилу) полезно присвоить название. Так, например, функцию, область определения которой есть множество всех вещественных чисел, а правило построения значения функций, соответствующего выбранному значению $x$ аргумента, состоит в том, что это значение умножается на некоторое фиксированное вещественное число $a$, называют *линейной однородной функцией*.

Именно такая функция и будет главным действующим лицом нашей статьи.

*) «Квант», 1970, №№ 1 и 2.

## 1. Линейная однородная функция аддитивна

Среди разнообразных функций, изучаемых в математике, читатель несомненно отметил одну, которая выделяется среди остальных своей особой простотой — эта функция $Л_a$ определена для всех вещественных значений аргумента $x$ и ее значения определяются формулой

$$Л_a(x) = ax$$

(в которой $a$ есть некоторое заданное вещественное число). Ее мы и назвали: *линейная однородная функция*. Она встречается во всех тех задачах физики (и не только физики), в которых изучаются пропорциональные величины.

Наблюдения преподавателей показывают, что одно ее свойство школьники ощущают очень хорошо, настолько хорошо, что часто (даже слишком часто!) приписывают его другим, более сложным функциям. В самом деле, замечал ли читатель-школьник, что некоторые его друзья по классу, начавши изучение тригонометрических функций, считают, что синус суммы двух углов равен сумме синусов этих углов? Суть этой «детской» ошибки в том, что школьник, познакомившись с какой-либо новой функцией — назовем ее $\Phi$,— склонен считать, что она должна обладать следующим «простым» свойством:

$$\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2). \quad (1)$$

Линейная однородная функция этим свойством действительно (проверьте!) обладает, но, увы, им *не обладают другие функции*, изучаемые в школе.

Всякую функцию, обладающую свойством, выраженным равенством (1), называют *аддитивной* функцией. Легко проверить, что *линейная неоднородная* функция, то есть функция $G$, определенная для любого вещественного значения аргумента формулой

$$G(x) = ax + b \qquad (b \neq 0),$$

уже не является аддитивной; точно так же не обладают свойством аддитивности и функции, определенные для любого значения аргумента $x$, значения которых определяются по следующим правилам:

$$x \to ax^2 + bx + c,$$

$$x \to \frac{1}{x^2 + a^2},$$

и многие, многие другие функции.

Да существует ли хоть одна какая-нибудь аддитивная функция от вещественного аргумента, отличная от линейной однородной,— спросит читатель.

Ответ на этот вопрос он получит, если не поленится внимательно прочитать эту небольшую статью.

## 2. Исследования произвольной аддитивной функции

1. Если функция $\Phi$ обладает свойством (1), то, как легко проверить, она обладает и следующим свойством:

$$\Phi(x_1 + x_2 + x_3) = \\ = \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \Phi(x_3). \quad (1'),$$

В самом деле, в силу свойства (1) имеем

$$\Phi(x_1 + x_2 + x_3) = \Phi((x_1 + x_2) + x_3) = \\ = \Phi(x_1 + x_2) + \Phi(x_3) = \\ = \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \Phi(x_3).$$

Читателя не затруднит доказать, что и

$$\Phi(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \\ = \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \ldots + \Phi(x_n) \quad (1'')$$

(придется, конечно, воспользоваться методом математической индукции).

Из формулы (1″) следует равенство

$$\Phi(nx) = n\Phi(x) \qquad (2)$$

($n$ — произвольное *целое* положительное число).

Так как равенство (2) справедливо при любом значении $x$, положим в нем $x$ равным $\frac{m}{n} y$ ($m$ и $n$ — целые положительные). Получим

$$\Phi(my) = n\Phi\left(\frac{m}{n} y\right).$$

Вновь используя равенство (2), получим

$$m\Phi(y) = n\Phi\left(\frac{m}{n} y\right),$$

то есть

$$\Phi\left(\frac{m}{n} y\right) = \frac{m}{n} \Phi(y). \qquad (2')$$

Итак, мы убедились в том, что если функция $\Phi$ аддитивна, то для любого положительного рационального числа $\alpha = \frac{m}{n}$ имеет место равенство

$$\Phi(\alpha x) = \alpha\Phi(x) \qquad (3)$$

(каково бы ни было вещественное число $x$!).

Это замечательное соотношение дает нам *возможность вычислить для любой аддитивной функции $\Phi$ ее значение для любого положительного рационального значения $x$ аргумента, если задано только одно ее значение — а именно то, которое она принимает, когда аргумент равен единице*.

В самом деле, положив в (3) $x$ равным единице, мы получим

$$\Phi(\alpha) = \alpha\Phi(1). \qquad (4)$$

2. Не менее удивительным является то, что *формула (4) для вычисления значений любой аддитивной функции $\Phi$ применима для всех рациональных значений аргумента* (а не только для положительных его значений).

а) Прежде всего убедимся в том, что

$$\Phi(0) = 0\Phi(1),$$

то есть что

$$\Phi(0) = 0.$$

В самом деле, в силу аддитивности функции $\Phi$, имеет место равенство

$$\Phi(x + 0) = \Phi(x) + \Phi(0),$$

то есть

$$\Phi(x) = \Phi(x) + \Phi(0)$$

и, следовательно

$$\Phi(0) = 0. \qquad (5)$$

б) Далее, в силу аддитивности функции $\Phi$, имеем

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = \\ = \Phi(x + (-x)) = \Phi(0)$$

откуда (в силу (5))

$$\Phi(-x) = -\Phi(x) \qquad (6)$$

(каково бы ни было вещественное значение $x$!).

Итак, мы убедились, что *любая аддитивная функция есть нечетная функция*.

Теперь мы уже можем доказать, что формула (4) годится для вычисления значений аддитивной функции и для *отрицательных* рациональных значений аргумента.

Пусть $\beta$ — какое-либо отрицательное рациональное число; тогда, в силу (6),

$$\Phi(\beta) = -\Phi(-\beta). \qquad (7)$$

Здесь $(-\beta)$ уже положительное рациональное число, поэтому мы можем использовать формулу (4)

$$\Phi(-\beta) = (-\beta)\,\Phi\,(1).$$

Подставляя последнее соотношение в (7), получим

$$\Phi(\beta) = \beta\Phi(1),$$

что мы и хотели доказать.

### 3. Функции, не ограниченные сверху

«Вот и ответ на вопрос, поставленный в конце первого пункта этой статьи — скажет читатель: никаких аддитивных функций, кроме однородных линейных, не существует!»

Нет, это не так!

Ведь мы доказали формулу (4) только для рациональных значений $x$. Применять же ее для вычисления значений нашей аддитивной функции $\Phi$ для $x$, скажем, равного $\sqrt{2}$, у нас нет никаких оснований.

Неудивительно поэтому, что математики настойчиво продолжали искать аддитивную функцию, которая отличалась бы от линейной однородной.

Найти такую функцию действительно нелегко! Ведь мы уже убедились, что ее значения (если она существует!) должны совпадать со значениями некоторой линейной однородной функции $x \to xa$, грубо говоря, «почти» для всех $x$: хотя рациональные числа и не исчерпывают множества всех вещественных чисел, но их практически достаточно для приближенного решения задач с любой степенью точности.

Построил пример такой функции в 1905 году немецкий математик Гамель (Hamel) *).

Но в этой статье, к сожалению, мы не сможем познакомить читателя с этим примером — даже если пойдем на отступления от строго математического изложения. Рассуждения Гамеля настолько своеобразны, что полностью разобраться в них можно, лишь обладая математическими навыками и культурой, приобретающимися в результате длительного изучения математики. Поэтому мы отметим здесь только одно важное свойство функции, построенной Гамелем: *среди значений, которые она принимает на произвольно выбранном*

*) Статья Гамеля напечатана в журнале Matematiche Annalen в томе 60, с. 454—462, 1905 г.

Нам не известно ни одного изложения этого результата Гамеля на русском языке.

*интервале* $(p,\ q)$ (*то есть при* $p \leqslant x \leqslant q$), *имеется такое, которое больше любого произвольно взятого положительного числа.*

Про такую функцию говорят, что на интервале $(p,\ q)$ она *не ограничена сверху*.

Примером функции, не ограниченной сверху, например, на интервале $(-1,\ 1)$, может служить функция $H$, определяемая формулой $H(x) = \frac{1}{x}$ для значений аргумента, не равных нулю, и принимающая значение нуль для $x = 0$ (рис. 1). Другим примером может быть функция, определяемая формулой

$$P(x) = \frac{1}{(x-p)(x-q)}$$

при $x \neq p$ и $x \neq q$, и принимающая значение нуль для $x = p$ и $x = q$.

Эта функция не ограничена сверху на любом интервале, содержащем либо точку $p$, либо точку $q$ (см., например, рисунок 2).

Однако в обоих этих примерах существует такой интервал, в котором эти функции все же ограничены сверху (функция называется ограниченной сверху на данном интервале, если значения, которые она принимает на этом интервале, остаются меньше некоторого наперед заданного числа). А вот функция Гамеля, как мы уже сказали, не ограничена сверху на любом (сколь угодно малом!) интервале. Это и делает открытие Гамеля еще более интересным: он не только построил пример аддитивной функции, не являющейся линейной, но и ввел в математику функции, обладающие «странным» (для наглядного восприятия) свойством: они не ограничены сверху в любом интервале.

Откажемся теперь от рассмотрения таких *«странных»* функций и поищем *аддитивную функцию, ограниченную сверху хотя бы в каком-нибудь одном интервале.*

### 4. Аддитивная функция, ограниченная сверху хотя бы на одном интервале

1. Пусть аддитивная функция $\Phi$ ограничена сверху на интервале $(p,\ p+s)$, где $s$ — некоторое положительное число. Легко убедиться, что тогда $\Phi$ ограничена сверху и на интервале $(0,\ s)$.

*В самом деле, пусть* $x$ — *любое* положительное число, не большее чем $s$, тогда число $p + x$ лежит в интервале $(p,\ p+s)$ и, следовательно, $\Phi(p+x)$ меньше, чем некоторое заданное число $M$; в силу аддитивности $\Phi$,

$$\Phi(p) + \Phi(x) < M$$

и, следовательно,

$$\Phi(x) < M - \Phi(p)$$

для любого значения $x$, лежащего в интервале $(0,\ s)$.

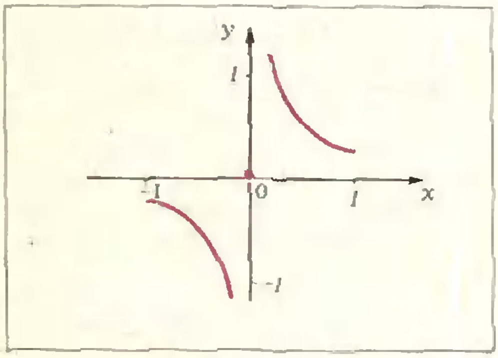



Рис. 1.

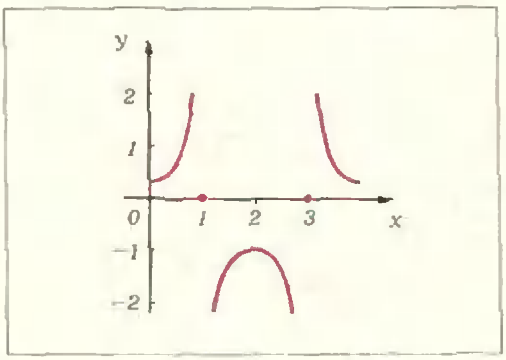



Рис. 2.

2. Рассмотрим теперь новую функцию $G$, значение которой для произвольного значения $x$ аргумента будем вычислять по формуле

$$G(x) = \Phi(x) - \frac{\Phi(s)}{s}x. \qquad (8)$$

Функция $G(x)$ тоже ограничена сверху на интервале $(0, s)$: ее значение на этом интервале меньше чем $M' = M - \Phi(p) + |\Phi(s)|$.

3. Очевидно (см. (8)), что функция $G$ аддитивна и что $G(s) = 0$. Поэтому

$$G(x+s) = G(x) + G(s) = G(x)$$

и, следовательно, число $s$ *период* функции $G$!

Таким образом, значение, которое принимает функция $G$ для какого-либо значения аргумента $x$, равно значению, которое она принимает для некоторого значения аргумента из интервала $(0, s)$, и, следовательно, оно меньше, чем $M'$, то есть $G(x) < M'$ для любого значения $x$.

4. Теперь мы уже можем доказать утверждение — быть может, и неожиданное для читателя:

*Любое значение функции $G$ равно нулю.*

Это мы сделаем «методом от противного». Пусть для какого-либо положительного значения $x_0$ аргумента $x$, меньшего чем $s$, соответствующее ему значение $G(x_0)$ отлично от нуля, $G(x_0) \neq 0$.

Тогда, в силу аддитивности функции $G$, имеем (см. формулу (4))

$$G(\alpha x_0) = \alpha G(x_0).$$

Подобрав $\alpha$ так, чтобы

$$\alpha G(x_0) > M',$$

мы получим

$$G(\alpha x_0) > M'.$$

А это противоречит тому, что $G(x) < M'$ при всех $x$. Следовательно, наше предположение было неверно, и $G(x_0) = 0$ для любого значения $x_0$, лежащего в интервале $(0, s)$. Приняв же во внимание, что функция $G(x)$ имеет период $s$, придем к выводу, что

$$G(x) = 0 \qquad (9)$$

для любого значения $x$.

5. Возвращаясь теперь к определению (8) функции $G$, получим, в силу (9), что

$$\Phi(x) = ax \quad \left(\text{где } a = \frac{\Phi(s)}{s}\right).$$

Вероятно, читатель предчувствовал этот результат. Вот его словесная формулировка: *если аддитивная функция ограничена сверху хотя бы на одном (даже сколь угодно малом) интервале, то она линейная однородная функция!*

## 5. Функциональные уравнения

Этот результат можно сформулировать еще и так:

Задача — *найти функцию $\Phi$, определенную для любого вещественного значения аргумента и обладающую тем свойством, что для любых значений $x$ и $y$ аргумента имеет место равенство*

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y) \qquad (10)$$

имеет много решений. И если даже искать только те решения $\Phi$ этого *уравнения*, которые ограничены сверху — хотя бы на каком-нибудь одном интервале,— то все же решений будет много. Но любое такое решение есть линейная однородная функция, то есть функция вида

$$x \to ax$$

($a$ — некоторое вещественное число).

Следует сказать, что эту задачу принято формулировать следующим образом:

*Найти функцию $\Phi$, удовлетворяющую функциональному уравнению* (10).

Задачи, в которых требуется найти функцию, обладающую некоторым указанным свойством, редко встречаются в школе, но часто рассматриваются в математике и играют в ней важную роль. Вот еще одна такая задача:

*Найти функцию $G$, обладающую тем свойством, что для любых значений $x$ и $y$ аргумента* (*принадлежащих, конечно, области определения искомой функции $G$*) *имеет место* *равенство*

$$G(x+y) = G(x) + G(y) + p, \quad (11)$$

*в котором* $p$ — *заданное число.*

Читатель легко проверит, что функция

$$x \to ax - p$$

является ее решением. Заманчиво узнать, существуют ли какие-либо другие решения?

Интересна и такая задача: решить функциональное уравнение

$$H(x+2y) + H(x) = 2H(x+y). \quad (12)$$

Легко убедиться, что функция

$$x \to ax + b$$

($a$ и $b$ — произвольные числа) является решением уравнения (12). Существуют ли другие решения?

Выдающиеся математики прошлого времени — и среди них такие, как Эйлер, Гаус, Коши, Абель, Лобачевский, Вейерштрас, Дарбу, Гильберт,— часто обращались к функциональным уравнениям и использовали их для решения многих важных вопросов. Систематическое изучение функциональных уравнений начал еще Коши — в 1821 году он издал свой Курс Анализа *) (этот курс он читал в Парижском политехническом институте). В нем он подробно (но все же недостаточно полно) изучил рассмотренное в нашей статье функциональное уравнение (10)— его называют теперь «функциональное уравнение Коши»; это уравнение особенно часто используется в различных математических теориях. Вместе с ним Коши рассматривает и следующие функциональные уравнения:

$$\Phi(x+y) = \Phi(x)\Phi(y),$$
$$G(xy) = G(x)G(y),$$
$$H(xy) = H(x) + H(y).$$

«Частные» решения этих уравнений читатель несомненно сумеет найти. Значительно более трудно найти для каждого из них все решения. Мы надеемся поговорить об этом в другой статье.

*) A. Cauchy, Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique I. Analyse algebreque. V (Paris, 1821).

3*

## С чего начинается логика?

*(Окончание. Начало см. с. 24)*

4) *Импликация* высказываний $A$ и $B$ (символически $A \supset B$, читается как «$A$ влечет $B$», или «Из $A$ следует $B$», или «Если $A$, то $B$») ложна, если *посылка* $A$ истинна, а *заключение* $B$ ложно, и истинна во всех остальных случаях:

| $A$ | $B$ | $A \supset B$ |
|---|---|---|
| и | и | и |
| и | л | л |
| л | и | и |
| л | л | и |

5) *Эквиваленция* высказываний $A$ и $B$ ($A \sim B$ читается как «$A$ равносильно $B$») истинна, если $A$ и $B$ имеют одинаковые истинностные значения, и ложна, если значения истинности $A$ и $B$ различны:

| $A$ | $B$ | $A \sim B$ |
|---|---|---|
| и | и | и |
| и | л | л |
| л | и | л |
| л | л | и |

Конечно, определения эти сами по себе достаточно просты и запомнить их нетрудно. Но они вызывают ряд вопросов, без ответа на которые дальнейшее обсуждение темы было бы совершенно беспредметным. Например, почему мы именно так, а не иначе определили и назвали эти операции? Иными словами, какая связь между всеми этими таблицами и «обычным» смыслом таких всем известных слов, как «не», «и», «или», «следует»? Каковы основания считать эти операции «основными»? Какие еще (не «основные») бывают и могут быть логические операции? Да и что в них, собственно говоря, «логического»? Ограничимся пока советом: подумайте над всеми этими вопросами сами.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

# Арифметико-геометрическая прогрессия

*Я. Н. Суконник*

**Математику можно изучать по-разному. Можно слушать лекции или взять толстую книгу и читать ее подряд: определения, теоремы, доказательства. А можно действовать более активно: прочитать определения и формулировки теорем, отложить книгу в сторону и придумывать доказательства самому. Первый способ поначалу дает возможность двигаться быстрее. Но только второй способ позволяет глубоко разобраться в математической теории, надолго ее запомнить и научиться применять. Поэтому именно этот способ — самостоятельное открытие старых истин — часто используется в работе математических семинаров, школ, кружков.**

**Именно на такую активную работу читателей рассчитаны статьи, помещаемые в разделе «Математический кружок». Обычно эти статьи представляют собой цикл задач, объединенных общей темой или методом решения. Некоторые из них решены в тексте, но большинство — и легких, и трудных — оставлены для самостоятельного решения читателю. Иногда краткие решения этих задач (или указания и ответы) помещаются в том же номере, но чаще — в одном из следующих номеров журнала на последних страницах.**

**Как правило, наш «Математический кружок» доступен ученикам 8—9, а иногда и 7 классов. Письма с замечаниями и пожеланиями по поводу этого раздела просьба присылать с пометкой «Математический кружок» на конверте.**

**Многие участники Всесоюзной олимпиады ведут регулярную переписку с «Математическим кружком».**

В этой статье рассматривается одна последовательность, которую можно условно назвать *арифметико-геометрической прогрессией*; она задается следующим рекуррентным соотношением:

$$u_1 = a_1, \quad u_{n+1} = qu_n + d, \qquad (1)$$

где $q$ и $d$ — постоянные параметры. Положив в (1) $q = 1$, получим *арифметическую* прогрессию

$$u_1 = a_1, \quad u_{n+1} = u_n + d,$$

положив $d = 0$, — *геометрическую*:

$$u_1 = a_1, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

(Этим и объясняется то, что мы последовательность (1) назвали арифметико-геометрической прогрессией. По аналогии будем говорить, что $q$ — знаменатель, а $d$ — разность арифметико-геометрической прогрессии.)

Примеры арифметико-геометрических прогрессий

а) $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \ldots$

$$\left(u_1 = 1,\ q = \frac{1}{2},\ d = 1\right);$$

б) $-1, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \ldots$

$$\left(u_1 = -1,\ q = -\frac{1}{2},\ d = 1\right).$$

На мысль поговорить о таких последовательностях нас натолкнула задача М97, которая была опубликована в «Кванте» № 8 за 1971 год (в «Задачнике «Кванта»). Вот ее условие (несколько видоизмененное):

*В трапеции $AA_1B_1B$ с основаниями $AB = a$ и $A_1B_1 = a_1$ ($a < a_1$) проведен отрезок $A_2B_2$, соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции $AA_2B_2B$ снова проведен отрезок $A_3B_3$, соединяющий середины диагоналей, и так далее. Найти длину отрезка $A_{n+1}B_{n+1}$.*

На рисунке 1 изображена трапеция $AA_nB_nB$ — здесь $AB = a$, $CD$ — средняя линия трапеции, $A_{n+1}$ и $B_{n+1}$ — середины диагоналей $A_nB$ и $AB_n$. Понятно, что точки $A_{n+1}$ и $B_{n+1}$ лежат на $CD$. Обозначив длины отрезков $A_nB_n$ и $A_{n+1}B_{n+1}$ через $a_n$ и $a_{n+1}$, получим

$$a_{n+1} = |A_{n+1}B_{n+1}| = \\ = |A_{n+1}D| - |B_{n+1}D| = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a,$$

и, значит, длины отрезков $A_nB_n$ образуют как раз *арифметико-геометрическую прогрессию*.

Арифметико-геометрическая прогрессия обладает признаками и арифметической, и геометрической прогрессий. Выведем формулу ее общего члена.

Пусть в соотношении (1) $q \neq 1$ (и $d \neq 0$). Прибавив к обеим частям (1) выражение $\frac{d}{q-1}$, получим

$$u_{n+1} + \frac{d}{q-1} = q\left(u_n + \frac{d}{q-1}\right).$$

Учитывая, что это соотношение — рекуррентное, напишем аналогичные равенства для $k = n+1, n, \ldots, 2$:

$$u_{n+1} + \frac{d}{q-1} = q\left(u_n + \frac{d}{q-1}\right),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$u_2 + \frac{d}{q-1} = q\left(a_1 + \frac{d}{q-1}\right).$$

Перемножив выписанные равенства и сократив одинаковые сомножители, получим *формулу общего члена арифметико-геометрической прогрессии*

$$\boxed{u_{n+1} = q^n\left(a_1 + \frac{d}{q-1}\right) + \frac{d}{1-q}.} \qquad (2)$$

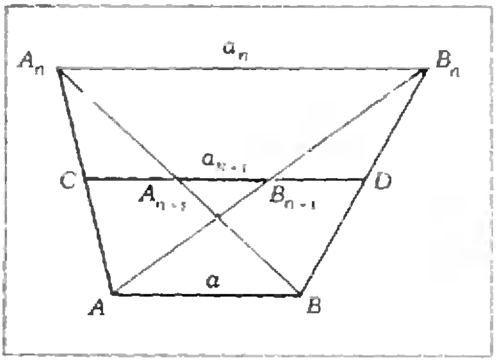



Рис. 1.

В задаче М97 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a$, то есть $q = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{1}{2}a$; поэтому

$$a_{n+1} = |A_{n+1}B_{n+1}| = \frac{1}{2^n}(a_1 + a) - a.$$

Сформулируем теперь некоторые основные с в о й с т в а арифметико-геометрической прогрессии (их доказательства мы оставляем читателям).

1°. Арифметико-геометрическая прогрессия (1) является *возвратной последовательностью второго порядка**) и задается уравнением

$$u_{n+1} = (q+1)u_n - qu_{n-1}. \qquad (3)$$

В частности, при $q = 1$ получаем характеристическое свойство арифметической прогрессии

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}.$$

С л е д с т в и е. Знаменатель $q$ арифметико-геометрической прогрессии определяется по формуле

$$q = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}. \qquad (4)$$

2°. Разность $d$ арифметико-геометрической прогрессии определяется

*) Последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется *возвратной последовательностью k-го порядка*, если существует натуральное число $k$ и числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ такие, что, начиная с некоторого номера $N$ и для всех следующих номеров $m \geqslant N$
$u_{m+k} = a_1u_{m+k-1} + a_2u_{m+k-2} + \ldots + a_ku_m$.
Последнее соотношение называется *возвратным уравнением k-го порядка*.

по формуле

$$d=\frac{u_n^2-u_{n-1}\cdot u_{n+1}}{u_n-u_{n-1}}. \qquad (5)$$

В частности, если $d=0$ (и $q\neq 1$), получаем характеристическое свойство геометрической прогрессии

$$u_n=\sqrt{u_{n-1}\cdot u_{n+1}}.$$

3° (*характеристическое свойство арифметико-геометрической прогрессии*). Последовательность $\{a_n\}$, где $a_n=u_{n+1}-u_n$, является геометрической прогрессией с тем же знаменателем $q$, то есть

$$|u_{n+1}-u_n|=$$
$$=\sqrt{|u_n-u_{n-1}|\cdot|u_{n+2}-u_{n+1}|}. \qquad (6)$$

4°. Последовательность

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ \ldots,$$
$$S_n=u_1+\ldots+u_n,$$
$$S_{n+1}=S_n+u_{n+1},\ \ldots$$

*частичных сумм* членов арифметико-геометрической прогрессии является возвратной последовательностью третьего порядка и задается следующим уравнением:

$$S_{n+1}=(q+2)\,S_n-$$
$$-(2q+1)\,S_{n-1}+qS_{n-2}. \quad (7)$$

5°. Если последовательность частичных сумм $S_1,\ldots,S_n,\ldots$ является арифметико-геометрической прогрессией, то последовательность $u_1,\ldots,u_n\ldots$ является геометрической прогрессией.

Замечание. Из формулы общего члена арифметико-геометрической прогрессии (см. формулу (2)) следует, что

а) при $|q|<1$ арифметико-геометрическая прогрессия *сходится* (причем при $0\leqslant q<1$ — *монотонно*) к числу

$$A=\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{d}{1-q};$$

б) при $|q|\geqslant 1$ арифметико-геометрическая прогрессия *расходится*.

В частности, устремив в задаче М97 число $n$ к бесконечности, получим, что в пределе

$$b=\lim_{n\to\infty}|A_{n+1}B_{n+1}|=\left|\frac{-\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{2}}\right|=a.$$

(Интересно, что если в задаче М97 вместо условия $a<a_1$ потребовать $a>a_1$, то тогда

$$|A_{n+1}B_{n+1}|=-\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}a,$$

то есть

$$|A_{n+1}B_{n+1}|=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(a_1-\frac{a}{3}\right)+\frac{a}{3},$$

и

$$b=\lim_{n\to\infty}A_{n+1}B_{n+1}=\frac{a}{3}\Big).$$

Знакомство с арифметико-геометрической прогрессией иногда помогает при решении некоторых геометрических задач. Рассмотрим, например, такую задачу:

*Высоты остроугольного треугольника $A_1B_1C_1$ продолжены до пересечения с описанной окружностью соответственно в точках $A_2$, $B_2$, $C_2$, служащих вершинами остроугольного треугольника $A_2B_2C_2$. Высоты треугольника $A_2B_2C_2$ продолжены до пересечения с описанной окружностью соответственно в точках $A_3$, $B_3$, $C_3$, служащих вершинами остроугольного треугольника $A_3B_3C_3$, и так далее — до треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ включительно. Найти углы треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, считая углы треугольника $A_1B_1C_1$, известными.*

Решение. На рисунке 2 изображены окружность и вписанные в нее остроугольные треугольники $A_nB_nC_n$ и $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$. Выразим угол $A_{n+1}$ через угол $A_n$:

$$\angle A_{n+1}=\angle B_{n+1}A_{n+1}C_{n+1}=$$
$$=\angle B_{n+1}A_{n+1}A_n+\angle A_nA_{n+1}C_{n+1}=$$
$$=\angle B_{n+1}B_nA_n+\angle A_nC_nC_{n+1}=$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}-\angle A_n\right)+$$
$$+\left(\frac{\pi}{2}-\angle A_n\right)=\pi-2\angle A_n,$$

то есть

$$\angle A_{n+1}=-2\angle A_n+\pi$$

и последовательность углов $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ образует арифметико-геометрическую прогрессию. По формуле (2) находим

$$\angle A_{n+1}=(-2)^n\cdot\left(\angle A_1-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}.$$

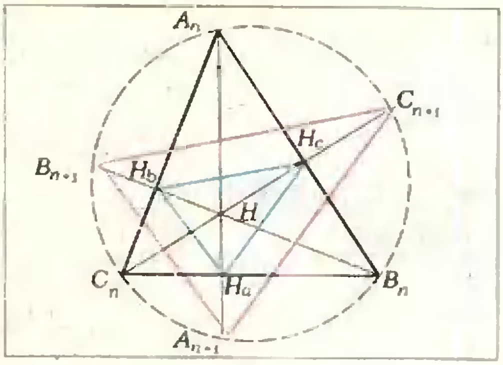



Рис. 2.

Аналогично получаем

$$\angle B_{n+1}=(-2)^n\cdot\left(\angle B_1-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}$$

и

$$\angle C_{n+1}=(-2)^n\cdot\left(\angle C_1-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}.$$

В заключение мы предлагаем читателям несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Около остроугольного треугольника $A_1B_1C_1$ описан остроугольный треугольник $A_2B_2C_2$, стороны которого являются касательными к окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ в его вершинах. Около треугольника $A_2B_2C_2$ аналогичным образом описан остроугольный треугольник $A_3B_3C_3$ и так далее, вплоть до треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ включительно. Найти углы треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$.

2. Около треугольника $A_1B_1C_1$ описан треугольник $A_2B_2C_2$, вершины которого совпадают с центрами вневписанных окружностей в треугольник $A_1B_1C_1$. Около треугольника $A_2B_2C_2$ аналогичным образом описан треугольник $A_3B_3C_3$ и так далее. Найти углы треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$. Доказать, что треугольник $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ при неограниченном возрастании $n$ стремится к правильному треугольнику.

3. Биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ продолжены до пересечения с описанной вокруг треугольника $A_1B_1C_1$ окружностью соответственно в точках $A_2$, $B_2$, $C_2$. Биссектрисы треугольника $A_2B_2C_2$ пересекают описанную окружность соответственно в точках $A_3$, $B_3$, $C_3$ и так далее. Найти углы треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$.

4. В треугольник $A_1B_1C_1$ вписан треугольник $A_2B_2C_2$, образованный проекциями центра вписанной окружности на его стороны. В треугольник $A_2B_2C_2$ аналогичным образом вписан треугольник $A_3B_3C_3$ и так далее. Найти углы треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$.

## Головоломки

В следующих примерах разные цифры зашифрованы разными буквами (в разных примерах, возможно, разными). Расшифруйте!

1. do×do = sol.
2. la×la = sol.
3. си×си = соль.
4. до×до×до = соль.
5. ля×ля×ля = соль.

*В. С. Максимов*

## Равенства из спичек

XIII = VII − VI
VII = V − I
XI + V = V

В этих равенствах, сложенных из спичек, допущены ошибки. Переложите в каждом из равенств только по одной спичке так, чтобы все равенства стали верными.

*Н. К. Антонович*

## Задачи

1. Решить уравнение $x^4-3x^3+3=0$.

2. Показать, что при любом действительном $p$ таком, что $|p|\leqslant\sqrt[4]{4q}$, уравнение

$$x^4+px^3+q=0,\quad q>0$$

действительных решений не имеет.

3. Показать, что при любом действительном $p$ таком, что $|p|\leqslant\sqrt[4]{12}$ уравнение

$$x^4-px^3+3=0$$

действительных решений не имеет.

4. Найти действительные решения системы $x^3y=-4$, $x-y=1{,}5$.

*Г. Ю. Зайцев*

# задачник кванта

**В этом разделе, который ведется из номера в номер с момента основания журнала, предлагаются разнообразные задачи — и относительно простые, и такие, которые нелегко решить даже специалисту. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. Если задача вас заинтересовала, но сразу решить ее не удается, — не опускайте руки, попробуйте вернуться к ней снова через день, через неделю. Даже после того как задача решена — если это действительно интересная задача, — работу над ней можно продолжить: подумать, нет ли более простого и красивого решения, постараться наиболее рационально и убедительно записать решение (иногда это совсем не просто сделать), попробовать обобщить задачу, уточнить или усилить ее результат.**

**Редакция помещает списки читателей, приславших правильные решения задач. Школьники, которые в течение года регулярно присылают интересные и полные решения, получают право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады по математике и физике наряду с победителями районных и городских олимпиад. Кроме того, для победителей конкурса по решению задач из «Задачника «Кванта» редакция устанавливает специальные премии.**

**Разумеется, не все задачи в «Задачнике» публикуются впервые, хотя мы и стремимся выбирать наиболее оригинальные задачи. Обычно после формулировки мы указываем, кто предложил нам задачу. Придумать новую задачу, пожалуй, даже труднее, чем решить чужую. Если это удастся, пришлите нам задачу вместе с решением. Напишите, как возникла у вас задача, встречали ли вы похожие задачи, с какими явлениями или математическими теоремами связан ваш новый результат. Наиболее красивые задачи мы опубликуем в «Задачнике» или в других разделах журнала. Обычно мы публикуем решения задач с учетом присланных читателями писем через 6—8 месяцев.**

**Наш адрес: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, редакция журнала «Квант». На конверте после адреса напишите, решения каких задач вы посылаете (например, «задачи М301, М305» или «... Ф311»). Решения задач по каждому предмету (если вы посылаете задачи и по математике, и по физике) присылайте в отдельных конвертах. Формулировки новых задач нужно присылать в двух экземплярах (на конверте пометьте: «Новая задача по математике» или «...по физике»).**

**Мы получаем очень много писем и стараемся отвечать всем нашим корреспондентам. Просим оформлять решения аккуратно, чтобы облегчить работу редакции и консультантов отдела «Задачник «Кванта». В начале письма обязательно напишите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес, а также класс и школу, в которой вы учитесь. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (для ответа после проверки решений). Письма от читателей мы сможем учитывать только в том случае, если они будут написаны на русском языке и присланы не позднее, чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера. Например, письма с решениями задач из этого номера просим присылать не позднее 1 марта 1975 года.**

# Задачи

## М301—М305; Ф313—Ф317

**М301.** На плоскости заданы $2n$ точек — $n$ синих и $n$ красных, причем никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести $n$ отрезков так, что у каждого отрезка один конец лежит в красной точке, другой — в синей точке, и никакие два отрезка не имеют общих точек.

*С. Охитин*, ученик 10 класса (Оренбург)

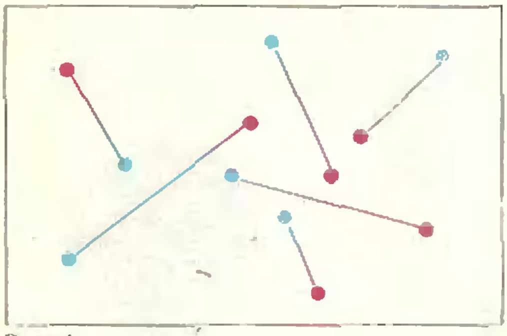


Рис. 1.

**М302.** Пусть $O$ — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($[AB] \parallel [CD]$), $A'$ и $B'$ — точки, симметричные точкам $A$ и $B$ относительно биссектрисы угла $AOB$. Докажите, что $\widehat{ACA'} = \widehat{BDB'}$.

*А. Буяновский*, ученик 10 класса (Гомель)

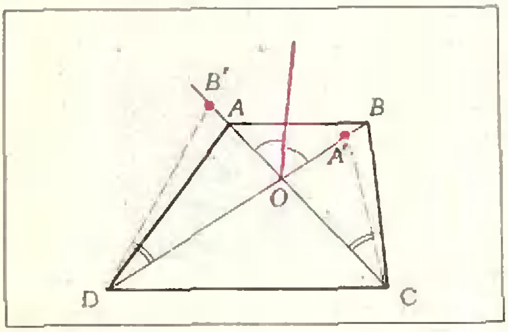



Рис. 2.

**М303.** Прямоугольник $300 \times 1000$ разрезан на квадраты $1 \times 1$, и в некоторых 30 вершинах квадратов помещены одинаковые гирьки. Докажите, что можно выбрать две непересекающиеся группы гирек — не более чем по 10 в каждой — так, что их центры тяжести совпадут.

*А. В. Шерстюк*

**М304.** Будем обозначать кружочком некоторую (неизвестную пока) операцию, применимую к любым двум целым неотрицательным числам $a$ и $b$ и дающую в результате тоже целое неотрицательное число $a \circ b = c$. Пусть операция «$\circ$» удовлетворяет следующим условиям:

1) $a \circ b = b \circ a$;

2) если $a \circ b = c$, то $b \circ c = a$;

3) если $a \circ b > c$, то $b \circ c < a$ или $a \circ c < b$.

а) Найдите $0 \circ 0$; $0 \circ 1$; $1 \circ 1$; $0 \circ 2$.

б) Докажите, что $0 \circ a = a$ и

$$1 \circ a = \begin{cases} a+1, & \text{если } a \text{ четно,} \\ a-1, & \text{если } a \text{ нечетно.} \end{cases}$$

в) * Докажите, что существует не более чем одна операция, удовлетворяющая условиям задачи.

г) * Докажите, что такая операция существует, и укажите правило, позволяющее по заданным $a$ и $b$ вычислять $a \circ b$.

*А. А. Григорян*

**М305*.** а) На хордах $AB$ и $A'B'$ окружности выбрано по точке $C$ и $C'$ так, что три прямые $AA'$, $BB'$ и $CC'$ пересекаются в одной точке $P$. Введем обозначения: $|AP|\cdot|A'P| = t$, $|AC|\cdot|CB| = s$, $|A'C'|\cdot|C'B'| = s'$, $|CP| = q$, $|C'P| = q'$. Докажите, что (при $q \neq 0$) $\sqrt{\frac{s'}{s}} = \frac{q'}{q} = \frac{s' + (q')^2}{t} = \frac{t}{s + q^2}$.

б) Через точку $P$, не лежащую на данной сфере, и каждую точку некоторой окружности σ, лежащей на этой сфере, проведена прямая. Докажите, что вторые точки пересечения проведенных прямых со сферой также лежат на некоторой окружности σ'.

Замечание. Одно из решений задачи б) можно получить, используя а), поэтому мы и объединили их под одним номером. Подумайте однако, как решить задачу б) другим способом.

*А. И. Ширшов*

**Ф313**. Коэффициент преломления атмосферы планеты $X$ уменьшается с высотой $h$ над ее поверхностью по закону $n = n_0 - \alpha h$. Радиус планеты $R$. Найти, на какой высоте $h_0$ над поверхностью планеты находится оптический канал, по которому световые лучи будут обходить планету, оставаясь на постоянной высоте.

*Н. Н. Седов*

**Ф314**. По гладкой и абсолютно неупругой коленчатой трубке, содержащей очень большое число колен, начинает скользить шарик (рис. 3). Найти установившуюся скорость движения шарика по горизонтальным участкам трубки. Зависит ли она от начальной скорости? Разность высот соседних горизонтальных участков $h$. Наклонные участки образуют с горизонтом угол $\alpha$.

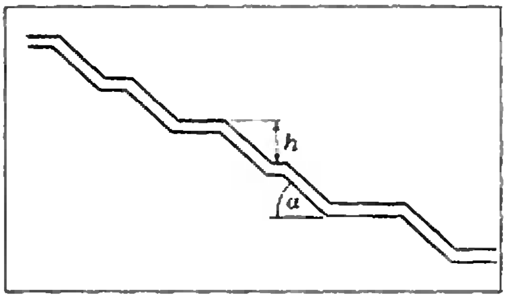



Рис. 3.

**Ф315**. Проволочная спираль, присоединенная к городской осветительной сети, нагревается электрическим током. Половину спирали начинают охлаждать (например, водой). Как это отразится на количестве тепла, выделяемого этой половиной спирали? Другой половиной? Всей спиралью? Напряжение сети считать неизменным.

*В. Д. Горбунова*

**Ф316**. Если выпуклый «звездчатый» многогранник, вылепленный из пластилина, с силой бросать вертикально вниз, то он будет отскакивать от пола как упругий резиновый мячик, практически не сминаясь. В то же время пластилин легко мнется руками. Почему?

**Ф317**. В воздухе при нормальных условиях молекула сталкивается с другими молекулами, причем путь между столкновениями (длина свободного пробега) равен в среднем $\lambda = 10^{-5}$ *см*. Оцените размер молекулы воздуха.

*С. М. Козел*

# Решения задач

## М261—М267; Ф273—Ф277

**М261.** *Обруч радиуса $R$, висевший на неподвижном круге радиуса $r<R$, начинают катить по этому кругу. Докажите, что точка обруча описывает ту же траекторию, которую описывала бы точка колеса радиуса $R-r$, катящегося снаружи по тому же кругу радиуса $r$ (рис. 1). (Качение происходит без скольжения — так, что длины прокатившихся друг по другу дуг равны.)*

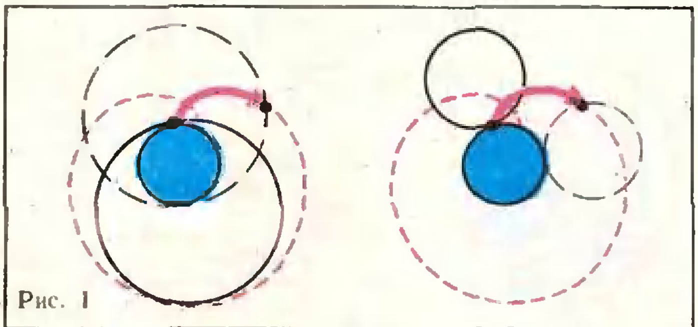


Рис. 1

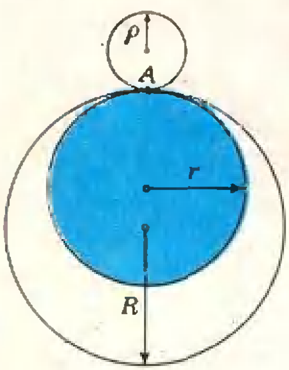




Рис. 2.

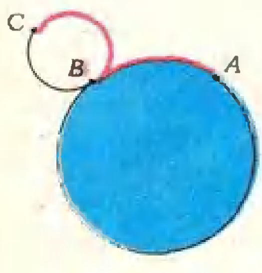




Рис. 3.

Обозначим радиус колеса $R-r$ через $\rho$. Кривые, описываемые при указанном качении точками границы колеса, называются *эпициклоидами*, вид их определяется отношением $\frac{\rho}{r}$; кривые, описываемые точками обруча — *перициклоидами*. Докажем, что при указанном в условии соотношении между радиусами ($R=r+\rho$) перициклоиды совпадают с эпициклоидами.

Зафиксируем по одной точке на колесе и на обруче. Пусть в начальный момент точки, наблюдаемые на колесе и обруче, совпадают с одной и той же точкой $A$ границы неподвижного круга (рис. 2). Пусть для определенности и колесо, и обруч катятся по кругу против часовой стрелки. Если в некоторый момент колесо касается неподвижного круга в точке $B$, то точка, наблюдаемая на его границе (точка эпициклоиды), занимает такое положение $C$, что длины $\smile AB$ и $\smile BC$ равны ($\smile BC$ выбирается с учетом направления качения (рис. 3)): в этом и состоит условие качения без скольжения.

Аналогично, положение точки $C'$, наблюдаемой на обруче (точки перициклоиды), в тот момент, когда он касается неподвижного круга в точке $B'$, находится из условия равенства длин $\smile AB'$ и $\smile B'C'$ (с учетом направления качения) (см. рисунок 4).

Докажем, что для любой точки $B$ на границе неподвижного круга можно так подобрать точку $B'$ (тоже — на границе неподвижного круга), что соответствующие точки $C$ (эпициклоиды) и $C'$ (перициклоиды) совпадут (рис. 5). (Из нашего доказательства будет ясно также, как по $B$ выбирать $B'$.)

Возьмем точку $B'$ так, чтобы отношение длин дуг $AB$ и $BB'$ было равно $\frac{\rho}{r}$: тогда — радианная мера $\smile BC$ равна радианной мере $\smile BB'$ — обозначим ее через $\varphi$. Имеем

$$\text{дл. } \smile AB = \text{дл. } \smile BC = \rho\varphi, \quad \text{дл. } \smile BB' = r\varphi.$$

Поэтому дл. $\smile B'C'$ = дл. $\smile AB' = \rho\varphi + r\varphi = R\varphi$, и радианная мера $\smile B'C'$ также равна $\varphi$. Пусть $O$ — центр неподвижного круга, $O_1$ — положение центра колеса в момент, когда

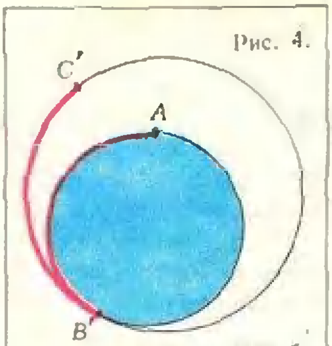



Рис. 4.

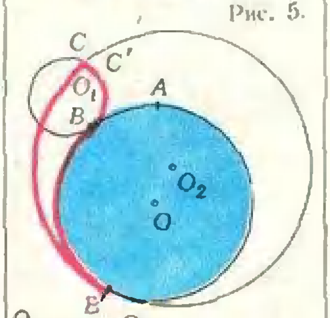



Рис. 5.

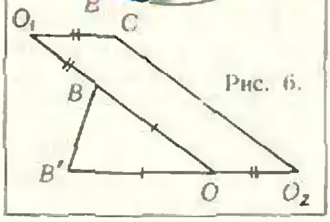



Рис. 6.

оно касается неподвижного круга в точке $B$. $O_2$ — положение центра обруча в момент касания обруча с неподвижным кругом в точке $B'$; точки $\{O, B, O_1\}$ и $\{O_2, O, B'\}$ лежат на одной прямой.

Пусть $0 < \varphi < \pi$. Имеем (рис. 6) $OB = OB' = r$, $O_2B' = R$, $OO_2 = R - r = \rho$, $O_1B = O_1C = \rho$, $O_1O = r + \rho = R$, $\angle BOB' = \angle OO_1C = \varphi$.

Значит, четырехугольник $OO_1CO_2$ — параллелограмм, и, значит, $O_2C = R$, $\angle CO_2B' = \varphi$. Таким образом, точка $C$ лежит на окружности радиуса $R$ с центром в $O_2$, причем радианная мера дуги $B'C$ равна $\varphi$. Это и означает, что $C$ совпадает с $C'$. Итак, мы доказали, что *если по неподвижному кругу прокатились дуги колеса и обруча одной и той же радианной меры $\varphi < \pi$, то получившиеся точки эпициклоиды и перициклоиды совпадут.*

Остается убедиться в справедливости этого утверждения и при $\varphi \geq \pi$. Посмотрите сами, во что «превращается» рисунок 5 при $\varphi = \pi$, а также при $\pi < \varphi < 2\pi$. Отметим, что поскольку разность между длинами обруча и колеса равна $2\pi r$ — длине границы неподвижного круга, то в тот момент, когда и колесо, и обруч сделают полные обороты, наблюдаемые точки, вновь попав на границу неподвижного круга, займут одно и то же положение $A_1$. Случай $2\pi < \varphi < 4\pi$ сводится к случаю $\varphi < 2\pi$, если считать точку $A_1$ начальной точкой вместо $A$. Если же считать $A_1$ начальной точкой и одновременно изменить направление качения, то случай $\pi \leq \varphi < 2\pi$ сведется к случаю $\varphi \leq \pi$.

*С. Г. Гиндикин*

Это решение можно коротко записать с помощью векторов. Если пользоваться «обобщенными углами» — углами вращения $\varphi$, которые могут принимать любые значения (не только в пределах от 0 до $2\pi$), то не придется рассматривать отдельно разных случаев: нужно использовать только, что для любых трех векторов **a**, **b**, **c**

$$\widehat{\mathbf{ab}} + \widehat{\mathbf{bc}} = \widehat{\mathbf{ac}}$$

(здесь $\widehat{\mathbf{ab}}$ — величина угла между векторами **a** и **b**).

Пусть $\mathbf{e}(\varphi)$ — вектор длины 1, получающийся поворотом на угол $\varphi$ по часовой стрелке из начального вектора $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}(0)$ *(скажем, направленного вверх). Тогда* $\mathbf{e}(\varphi + \pi) = -\mathbf{e}(\varphi)$.

Для точки $M_1$ колеса (рис. 7, *а*)

$$\overrightarrow{OO_1} = (\rho + r)\,\mathbf{e}(\varphi),$$

$$\overrightarrow{O_1M_1} = \rho\,\mathbf{e}(\pi + \varphi + \varphi_1).$$

Поскольку $\rho\varphi_1 = r\varphi$ (условие качения без скольжения), $\rho = R - r$, то

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M_1} = R\mathbf{e}(\varphi) - (R - r)\,\mathbf{e}\left(\frac{R}{R-r}\varphi\right). \quad (1)$$

Для точки $M_2$ обруча (рис. 7, *б*)

$$\overrightarrow{OO_2} = (R - r)\,\mathbf{e}(\psi + \pi),$$

$$\overrightarrow{O_2M_2} = R \cdot \mathbf{e}(\psi - \psi_1),$$

и так как $R\psi_1 = r\psi$, то

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2M_2} = R\mathbf{e}\left(\frac{R-r}{R}\psi\right) - (R - r)\,\mathbf{e}(\psi). \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), видим что $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2}$ при $\frac{R}{R-r}\varphi = \psi$. Значит, множество точек $M_1$ и $M_2$ совпадают.

*Н. Б. Васильев*

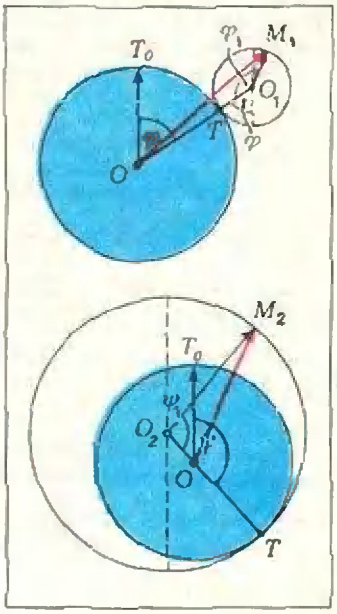



Рис. 7, *а*, *б*

**М262.** *Какое наибольшее число а) ладей, б) ферзей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы каждая из этих фигур была под ударом не более чем одной из остальных?*

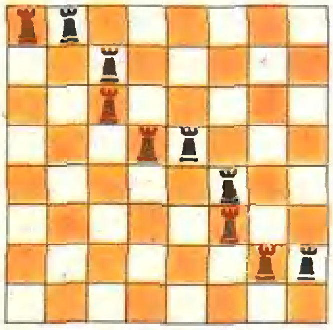


Рис. 8.

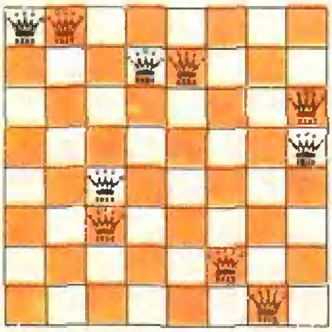


Рис. 9.

Следуя письму *Бориса* и *Льва Рабиновичей*, предложивших эту задачу, рассмотрим сразу доску размером $n \times n$ и докажем, что на ней нельзя расставить более $\frac{4n}{3}$ ладей так, как требуется в условии.

Пусть $k$ ладей расположены на доске $n \times n$ с соблюдением условия. На каждом поле, где стоит ладья, напишем число 0. В каждом из $n$ столбцов проделаем следующую операцию: если в столбце стоят два числа, то прибавим к обоим по 1, если одно число, то к нему прибавим 2 (в пустом столбце ничего писать не будем). Затем проделаем точно такую же операцию с каждой строкой. Ясно, что на месте каждой из $k$ ладей в результате будет написано число, не меньшее 3 — а именно, либо 3, либо 4, — поэтому сумма $S$ всех написанных чисел не меньше $3k$; с другой стороны, поскольку в каждый из $n$ столбцов и затем в каждую из $n$ строк мы добавили не более чем 2, то сумма $S$ не больше $4n$. Итак, $3k \leqslant S \leqslant 4n$, откуда $k \leqslant \frac{4n}{3}$.

В частности, для $n = 8$ получаем $k < \frac{32}{3}$, то есть $k \leqslant 10$. Пример расстановки 10 ладей, удовлетворяющей условию, показан на рисунке 8.

Нетрудно проверить, что для любого натурального $n$ тем же самым способом можно на доске $n \times n$ расставить $\left[\frac{4n}{3}\right]$ ладей с соблюдением условия ($[x]$ означает целую часть числа $x$).

Перейдем к задаче о расстановке ферзей. Ясно, что с соблюдением условия задачи ферзей можно поставить не больше, чем ладей. На рисунке 9 показано, что на доске $8 \times 8$ можно расставить 10 ферзей. Итак, в обеих задачах а) и б) ответ одинаковый: 10.

Что же касается обобщения задачи Рабиновичей о расстановке ферзей для доски $n \times n$, то ее полностью не решил никто из читателей. Можно убедиться, что для $n = 3, 4, 5$ наибольшее число ферзей, которое можно расставить на доске $n \times n$ так, чтобы каждый попал не более чем под один удар, на единицу меньше $\left[\frac{4n}{3}\right]$. Но для больших $n$ решение задачи требует, по-видимому, либо очень *большого перебора вариантов, либо привлечения дополнительных соображений.*

*Н. Б. Васильев*

◆

**М263.** *Даны два числа $p$ и $q$, большие 1. На сторонах $BC$ и $DC$ прямоугольника $ABCD$ берутся точки $P$ и $Q$ так, что $|BC| = p \cdot |BP|$ и $|DC| = q \cdot |DQ|$. При каком отношении длин сторон $AB$ и $AD$ угол $PAQ$ будет иметь наибольшую величину? Какова эта наибольшая величина в частном случае $p = 2$, $q = \frac{3}{2}$?*

Обозначим длины сторон прямоугольника $AB$ и $AD$ через $a$ и $b$ соответственно. Тогда

$$\operatorname{tg}(\angle PAQ) = \frac{\operatorname{tg}(\angle PAD) - \operatorname{tg}(\angle QAD)}{1 + \operatorname{tg}(\angle PAD)\cdot\operatorname{tg}(\angle QAD)} = \frac{\frac{ap}{b} - \frac{a}{qb}}{1 + \frac{a^2p}{b^2q}} = \frac{ab(pq-1)}{a^2p + b^2q}.$$

В силу теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом, имеем

$$a^2p + b^2q \geqslant 2\sqrt{a^2pb^2q} = 2ab\sqrt{pq}$$

(знак равенства имеет место при $a^2p = b^2q$, то есть когда $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{q}{p}}$).

Поэтому

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle PAQ)=\frac{ab(pq-1)}{a^2p+b^2q}\leqslant\frac{pq-1}{2\sqrt{pq}},$$

и $\sphericalangle PAQ$ достигает максимума $\operatorname{arctg}\dfrac{pq-1}{2\sqrt{pq}}$, когда

$$\frac{a}{b}=\frac{|AB|}{|AD|}=\sqrt{\frac{q}{p}}$$

($\sphericalangle PAQ$ — меньше 90°, а тангенс в первой четверти — возрастающая функция).

*В частности, если $p=2$, $q=\dfrac{3}{2}$, наибольшая величина угла $PAQ$ равна $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$.*

◆

**М264.** *В городе одна синяя площадь и $n$ зеленых, причем каждая зеленая площадь соединена улицами с синей и с двумя зелеными (рис. 10). На каждой из $2n$ улиц ввели одностороннее движение так, что на каждую площадь можно приехать и с каждой — уехать. Докажите, что с любой площади этого города можно, не нарушая введенных правил, доехать до любой из остальных.*

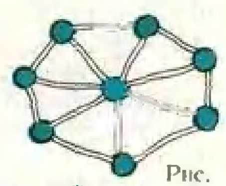


Рис. 10.

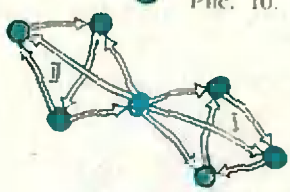



Рис. 11.

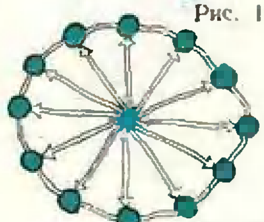


Рис. 12.

Прежде чем приступать к решению, отметим, что и условии задачи ссылка на рисунок 10 *существенна* — он является частью условия; так, например, для города, изображенного на рисунке 11 (с одной синей и $n$ зелеными площадями), все условия задачи выполнены, а утверждение — неверно: из части I нельзя проехать в часть II.

Перейдем теперь к решению нашей задачи. Разобьем доказательство на две части: докажем, что

а) от любой зеленой площади можно доехать до синей;

б) от синей площади можно доехать до любой зеленой.

Условимся обозначать направление движения на улицах стрелочками.

а) Предположим, что от зеленой площади $A_1$ нельзя доехать до синей площади. Поскольку уехать с площади $A_1$ можно, то от нее, проехав по одной улице, мы доедем до зеленой площади $A_2$. От площади $A_2$ *тоже нельзя доехать до синей площади.* Выехав с нее, мы доедем до площади $A_3$, потом $A_4$ и т. д. Поскольку всего зеленых площадей $n$, проехав по $n$ улицам, мы вернемся на площадь $A_1$ и убедимся, что стрелки в городе расставлены так, как на рисунке 12. Но тогда на синюю площадь нельзя приехать, что *противоречит условиям задачи.*

б) Изменим направления всех стрелок. Полученная схема движения удовлетворяет условиям задачи. Поэтому, как доказано в пункте а), при этой расстановке стрелок от любой зеленой площади можно доехать до синей. Но это и означает, что при старой расстановке стрелок от синей площади можно доехать до любой зеленой.

Обобщить задачу Б. Розенштейна о городе с односторонним движением можно так. Пусть в городе нет «тупиков» (в таком случае можно расставить направления на улицах так, что на каждую площадь можно приехать и с каждой уехать). Необходимое и достаточное условие того, что при любой такой расстановке стрелок от каждой площади можно доехать до любой другой; можно сформулировать так: *любые два кольцевые маршрута* (по городу, на улицах которого еще не расставлены стрелки) *должны проходить через одну площадь.* Докажите это.

*И. Н. Клумова*

**M265.** *Диагональ $d$ прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами $a$, $b$ и $c$ углы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Докажите, что $\alpha+\beta+\gamma$ меньше $\pi$.*

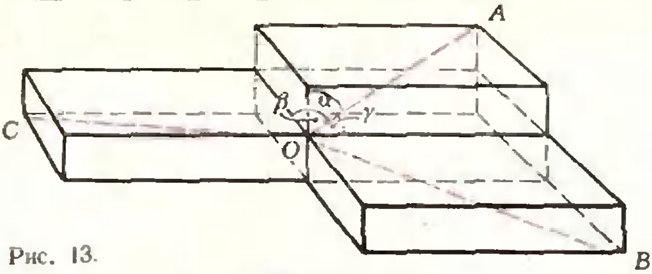



Рис. 13.

Приведем решение, которое прислал *Андрей Вятчин* (г. Павлово Горьковской области). Расположим три равных параллелепипеда так, как показано на рисунке 13. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle AOC = 2\beta$, $\angle AOB = 2\gamma$. Точка $O$ не лежит в плоскости, проходящей через точки $A$, $B$, $C$ (проверьте). Значит, $2\alpha+2\beta+2\gamma<2\pi$ (по теореме о сумме плоских углов трехгранного угла), то есть $\alpha+\beta+\gamma<\pi$.

Большинство читателей, приславших верные решения, свело задачу к проверке неравенства $\sin(\alpha+\beta+\gamma)>0$.

В заключение приведем две задачи — проверьте, что они эквивалентны задаче M265.

1. Для любого $\triangle ABC$ можно вычислить такую сумму:
$$S=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C.$$
Докажите, что $S=1$ для прямоугольных треугольников, $S<1$ для остроугольных и $S>1$ для тупоугольных треугольников.

2. Если $0<x<\frac{\pi}{2}$, $0<y<\frac{\pi}{2}$ и $\sin^2 x+\sin^2 y<1$, то $\sin^2 x+\sin^2 y<\sin^2(x+y)$.

*М. Л. Гервер*

◆

**M266.** *Дан выпуклый $n$-угольник.*

*а) Докажите, что если для каждой тройки последовательных вершин $n$-угольника построить окружность, проходящую через эти вершины, и из $n$ полученных окружностей выбрать такую, у которой радиус наибольший, то эта окружность содержит внутри себя весь данный $n$-угольник;*

*б) Докажите, что если для каждой тройки последовательных сторон $n$-угольника построить окружность, касающуюся этих сторон, и из $n$ полученных окружностей выбрать такую, у которой радиус наименьший, то она будет содержаться внутри данного $n$-угольника.*

а) Пусть $s$ — одна из окружностей с наибольшим радиусом. Обозначим ее центр через $S$, радиус — через $r$, лежащие на $s$ вершины многоугольника — через $A_1$, $A_2$, $A_3$. Предположим, что многоугольник $M$ не содержится внутри $s$ целиком; тогда найдется вершина — обозначим ее через $A_k$, — лежащая вне $s$; проведем через точки $S$ и $A_2$ прямую. Пусть $A_k$ находится в правой полуплоскости (см. рис. 14). Рассмотрим вершину $A_l$, лежащую вне $s$, у которой $3<l\leqslant k$ и номер $l$ — минимальный из возможных. Проверьте самостоятельно, что радиус $R$ окружности $s_1$, описанный около треугольника $A_2A_3A_l$, больше $r$, и что вершины $A_2$, $A_3$, ..., $A_l$ лежат в $s_1$ (см. рис. 15). Постараемся теперь прийти к противоречию — построить окружность, проходящую через три *соседние* вершины многоугольника, радиус которой больше $r$. Если $A_3$ и $A_l$ — соседние вершины, то противоречие уже получено. Пусть $A_3$ и $A_l$ — не соседние. Рассмотрим все окружности, проходящие через точки $A_3$, $A_l$ и $A_i$, где $3<i<l$, — радиусы этих окружностей не меньше $R$. Пусть та из них, у которой радиус наименьший, проходит через вершину $A_{l_1}$, где $3<l_1<l$. Если $A_3$, $A_{l_1}$ и $A_l$ — тройка последовательных вершин, то противоречие получено. Если нет, то мы от цепочки вершин $A_3$, ..., $A_l$ перейдем к более короткой цепочке: $A_3$, ..., $A_{l_1}$ или $A_{l_1}$, ..., $A_l$. Повторив несколько раз такой переход, мы придем к тройке соседних вершин. Поскольку при каждом переходе радиусы окружностей не убывали, радиус описанной около них окружности не меньше $R$, то есть больше $r$, — обещанное противоречие получено.

б) Пусть $s$ — одна из окружностей минимального радиуса, касающаяся сторон $a_1$, $a_2$ и $a_3$. Обозначим ее центр

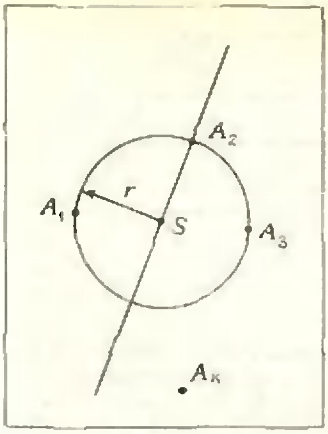



Рис. 14.

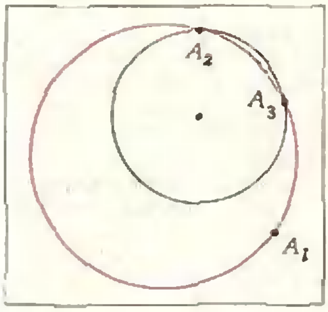



Рис. 15.

через $S$, а радиус через $R$. Если многоугольник $M$ не содержит $s$, то есть сторона $a_k$, ее пересекающая. Стороны $a_2$ и $a_k$ либо параллельны, либо пересекаются — предположим, что они пересекаются (см. рис. 16 — случай, когда они параллельны, разбирается аналогично). Рассмотрим сторону $a_l$, пересекающую $s$, у которой $3 \leqslant l \leqslant k$ и номер $l$ минимальный из возможных. Докажите самостоятельно, что радиус $r$ окружности, касающейся сторон $a_2$, $a_3$ и $a_l$, меньше $R$, и что стороны $a_2$, $a_3$, …, $a_l$ лежат вне этой окружности (см. рис. 17). Придем теперь к противоречию так же, как и в пункте а). Если $l = 4$, то противоречие получено. Если $l > 4$, то выберем из окружностей, касающихся сторон $a_3$, $a_l$ и $a_i$, где $3 < i < l$, окружность с максимальным радиусом. Ее радиус не больше $r$; пусть ей соответствует тройка $a_3$, $a_{l_1}$, $a_l$. Если $l_1 = 4$, $l = 5$, то противоречие получено. В противном случае выберем из пар $a_3$, $a_{l_1}$ и $a_{l_1}a_l$ не соседнюю и применим к ней то же построение, что и к паре $a_3$, $a_l$. За конечное число шагов мы придем к тройке соседних сторон, причем радиус касающейся их окружности будет не больше $r$. Противоречие получено.

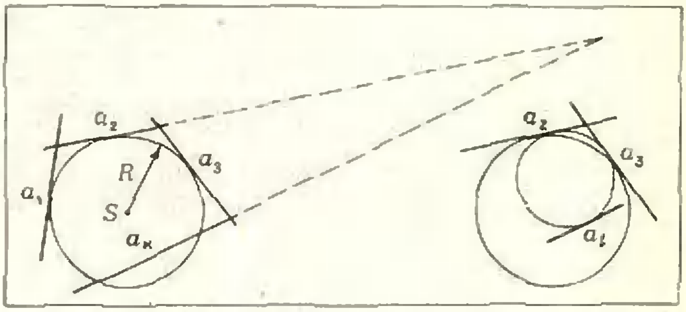



Рис. 16. Рис. 17.

Внимание! В пункте а) мы пользовались тем, что при каждом переходе радиусы окружностей не убывали, в пункте б) — тем, что они не возрастали. Продумайте самостоятельно, почему это так.

*Л. Г. Лиманов*

◆

**M267.** *В последовательности троек целых чисел (2, 3, 5) (6, 15, 10) . . . каждая тройка получается из предыдущей таким образом: первое число множится на второе, второе — на третье, а третье — на первое, и полученные произведения дают новую тройку.*

*Докажите, что ни одно из чисел, получаемых таким образом, не будет степенью целого числа: квадратом, кубом и т. д.*

Заметим, что порядок чисел внутри тройки не существен. Числа, входящие в следующую тройку, от него не зависят.

Докажем, что тройка с номером $2l+1$ имеет вид $\{2^{k+1}3^k5^k, 2^k3^{k+1}5^k, 2^k3^k5^{k+1}\}$, а с номером $2l$ — $\{2^{m-1}3^m5^m, 2^m3^{m-1}5^m, 2^m3^m5^{m-1}\}$, где $k$ и $m$ зависят от $l$. Воспользуемся для этого математической индукцией. Предположим, что тройки с номером $2l$ и $2l+1$ имеют такой вид. Легко убедиться, что из тройки $\{a, b, c\}$ через два шага получается тройка $\{a^2bc, ab^2c, abc^2\}$. Подставив сюда вместо $a$, $b$ и $c$ элементы $2l$-й и $2l+1$-й троек, мы получим

$$\{2^{4m-2}3^{4m-1}5^{4m-1}, 2^{4m-1}3^{4m-2}5^{4m-1}, 2^{4m-1}3^{4m-1}5^{4m-2}\}$$
и $$\{2^{4k+2}3^{4k+1}5^{4k+1}, 2^{4k+1}3^{4k+2}5^{4k+1}, 2^{4k+1}3^{4k+1}5^{4k+2}\}$$

соответственно, то есть тройки такого же вида. Поскольку *первая и вторая тройка удовлетворяют* предположению индукции, ему удовлетворяют и все тройки.

Итак, доказано, что все числа, входящие в тройки, имеют вид $p_1^{n\pm1}\cdot p_2^n\cdot p_3^n$, где $p_1$, $p_2$ и $p_3$ это числа 2, 3 и 5, взятые в любой последовательности. Очевидно, что ни одно из них не может быть степенью натурального числа.

*Н. Н. Климова*

**Ф273.** *Для получения газов при сверхвысоких температурах и давлениях иногда применяется установка, состоящая из закрытого с одного конца цилиндра-ствола и поршня-пули, влетающей в цилиндр с открытой стороны. При хорошей обработке пули и ствола удается добиться малой утечки газа через зазор. Благодаря очень высоким температурам сильно сжатые газы в этих условиях еще можно считать идеальными. Оценить верхний предел температуры аргона, подвергнутого сжатию в такой установке, если пуля массы $m = 100$ г влетает в ствол, имеющий объем $V_0 = 200$ см$^3$, с начальной скоростью $v = 250$ м/с. Начальные температура и давление газа равны соответственно $T_0 = 300°$ К и $p_0 = 1$ атм.*

При торможении пули ее кинетическая энергия переходит в тепло. Для оценки максимальной температуры, до которой может нагреться газ в цилиндре, будем считать, что все выделенное тепло идет на изменение внутренней энергии газа. То есть не будем учитывать потери энергии на нагревание пули и стенок цилиндра. Тогда можно записать

$$\frac{mv^2}{2} = \Delta U.$$

Так как аргон одноатомный газ, то $U = \frac{3}{2}nRT$ ($n$ — число молей газа) и

$$\Delta U = \frac{3}{2}nRT_{\max} - \frac{3}{2}nRT_0 = \frac{3}{2}nR(T_{\max} - T_0).$$

Величину $n$ можно найти из уравнения состояния идеального газа:

$$n = \frac{p_0V_0}{RT_0}.$$

Поэтому

$$\Delta U = \frac{3}{2}p_0V_0\frac{T_{\max} - T_0}{T_0}.$$

Следовательно,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}p_0V_0\frac{T_{\max} - T_0}{T_0},$$

откуда

$$T_{\max} = T_0\left(1 + \frac{mv^2}{3p_0V_0}\right) \approx 30\,000\ ^\circ\text{K}.$$

◆

**Ф274.** *Диод включен в цепь, изображенную на рисунке 18, а. Идеализированная вольт-амперная характеристика диода приведена на рисунке 18, б. Конденсатор предварительно не заряжен. Ключ К замыкают. Какое количество тепла выделится на сопротивлении R при зарядке конденсатора? Емкость конденсатора C, э. д. с. источника E. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.*

После замыкания ключа по цепи пойдет ток. Напряжение на конденсаторе будет увеличиваться, а ток соответственно уменьшаться. При этом пока ток не уменьшится до значения $I_0$, напряжение на диоде все время будет равно $U_0$ *). Пусть уменьшение тока до $I_0$ произошло за время $t_1$. Найдем, сколько тепла выделилось на сопротивлении $R$ за это время.

По закону сохранения энергии работа $A$, совершенная источником во всей цепи, равна сумме работ на отдельных участках цепи:

$$A = A_д + A_c + A_R.$$

Напряжение на конденсаторе в момент времени $t = t_1$ равно

$$U_c = E - U_0 - I_0R,$$

значит, за время $t_1$ по цепи прошел заряд

$$q_1 = CU_c = C(E - U_0 - I_0R).$$

Работа, совершенная источником за это время,

$$A_1 = q_1E = CE(E - U_0 - I_0R).$$

Работы на участках, содержащих диод и конденсатор, равны

$$A_д = q_1U_0 = CU_0(E - U_0 - I_0R),$$

$$A_c = W_c = \frac{q_1^2}{2C} = \frac{C(E - U_0 - I_0R)^2}{2}.$$

---

*) См. решение задачи Ф232, «Квант», 1974, № 5.

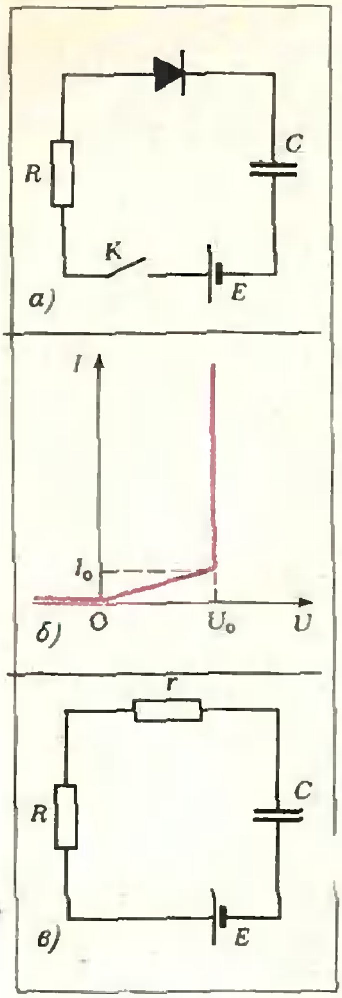



Рис. 18.

Тогда работа на сопротивлении $R$

$$A_R = Q_1 = A_1 - A_д - A_c = \frac{C}{2}\left[(E-U_0)^2 - (I_0R)^2\right].$$

При дальнейшем уменьшении тока от $I_0$ до 0 напряжение на диоде не будет постоянным. Согласно вольтамперной характеристике диода напряжение будет уменьшаться с уменьшением тока по линейному закону. Это значит, что в течение промежутка времени $t_2$, когда ток в цепи уменьшается от $I_0$ до 0, диод эквивалентен обычному сопротивлению, величина которого равна $r = \dfrac{U_0}{I_0}$ (рис. 18 в).

Чтобы найти количество тепла $Q_2$, выделившегося на сопротивлении $R$ за время $t_2$, опять воспользуемся законом сохранения энергии:

$$A_2 = \Delta W_c + Q,$$

где $\Delta W_c$ — изменение энергии конденсатора, а $Q = Q_2 + Q_r$ — количество тепла, выделившегося на сопротивлениях $R$ и $r$.

Когда ток в цепи прекратится, напряжения на диоде и на сопротивлении $R$ будут равны нулю, поэтому напряжение на конденсаторе будет равно $E$, а заряд — $q' = CE$. Следовательно, за время $t_2$ по цепи прошел заряд

$$q_2 = q' - q_1 = CE - C(E - U_0 - I_0R) = C(U_0 + I_0R).$$

Тогда

$$A_2 = q_2E = CE(U_0 + I_0R),$$

$$\Delta W_c = \frac{q'^2}{2C} - \frac{q_1^2}{2C} = \frac{CE^2}{2} - \frac{C}{2}(E - U_0 - I_0R)^2$$

и

$$Q = A_2 - \Delta W_c = \frac{C}{2}(U_0 + I_0R)^2.$$

Сопротивления $r$ и $R$ соединены последовательно, то есть в любой момент времени через эти сопротивления течет один и тот же ток. Поэтому количества тепла $Q_2$ и $Q_r$, выделившегося на сопротивлениях $R$ и $r$ за одно и то же время, относятся как величины сопротивлений, то есть

$$\frac{Q_2}{Q_r} = \frac{R}{r}.$$

Зная сумму $Q_2$ и $Q_r$ и их отношение, можно найти $Q_2$:

$$Q_2 = \frac{R}{R+r}Q = \frac{R}{R+r}\,\frac{C(U_0 + I_0R)^2}{2}.$$

Тогда окончательно

$$Q_R = Q_1 + Q_2 = \frac{C\left[(E-U_0)^2 - (I_0R)^2\right]}{2} + \frac{R}{R+r}\,\frac{C(U_0+I_0R)^2}{2}.$$

♦

**Ф275.** *На обод массивного колеса массы $M$ надет дополнительный груз малого размера и массы $m$, причем $\dfrac{M}{m} = 15$. С какой скоростью должно катиться колесо, чтобы оно подпрыгивало?*

Так как масса груза много меньше массы колеса, то можно не учитывать влияние силы тяжести груза на движение колеса и считать, что колесо катится с постоянной скоростью. В этом случае ускорение груза в системе координат, связанной с землей, равно центростремительному ускорению груза в системе координат, связанной с центром катящегося колеса, то есть

$$a = \frac{v^2}{R}$$

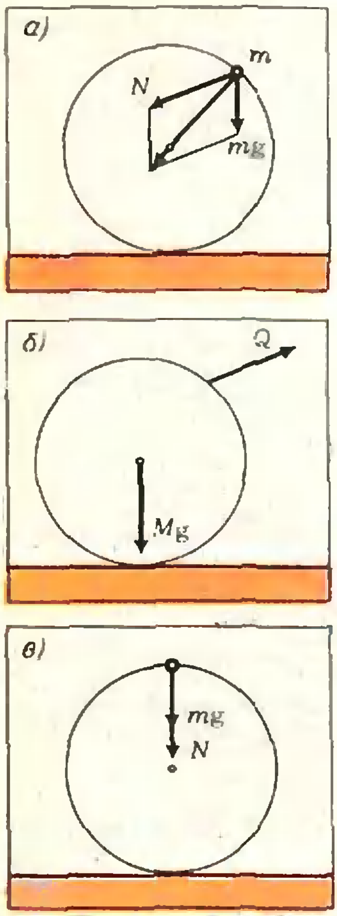



Рис. 19.

($v$ — скорость колеса, $R$ — его радиус). Это ускорение грузу сообщает равнодействующая двух сил: силы тяжести $m\mathbf{g}$ и силы реакции колеса $\mathbf{N}$ (рис. 19, *а*).

Со стороны груза на колесо действует сила $\mathbf{Q}$ (рис. 19, *б*), равная по абсолютной величине силе $\mathbf{N}$, но направленная в противоположную сторону. Ясно, что колесо подскочит, если вертикальная составляющая силы $\mathbf{Q}$ будет больше силы тяжести колеса $M\mathbf{g}$. Вертикальная составляющая силы $\mathbf{Q}$ максимальна и равна самой силе $\mathbf{Q}$ в тот момент, когда груз находится в верхней точке колеса. Следовательно, величина скорости, при которой колесо подскочит, определится из условия

$$Q \geqslant Mg. \qquad (1)$$

Согласно второму закону Ньютона для груза в наивысшей точке можно записать (рис. 19, *в*)

$$mg + N = m\frac{v^2}{R},$$

откуда

$$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right).$$

Так как $Q = N$, выражение (1) можно представить в виде

$$m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) \geqslant Mg,$$

откуда

$$v \geqslant \sqrt{Rg\left(\frac{M}{m} + 1\right)} = 4\sqrt{Rg}.$$

♦

**Ф276.** *Какие очки следует прописать человеку, если в воде он видит нормально?*

Нарисуем ход луча от бесконечно удаленного источника через глаз. Этот луч испытывает два преломления на двух поверхностях хрусталика (рис. 20). Согласно закону преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

где $n_1$ — абсолютный показатель преломления первой среды (воды или воздуха), $n_2$ — абсолютный показатель преломления вещества хрусталика.

Из этой формулы видно, что при уменьшении $n_1$ (замене воды на воздух) угол $\beta$ уменьшается. Это означает, что после

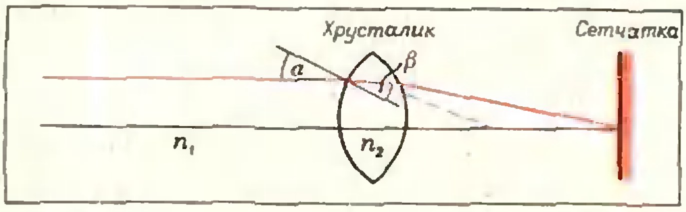
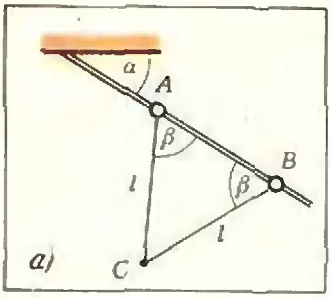


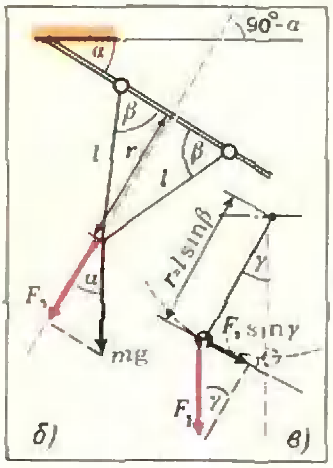

Рис. 20.

преломления на входной поверхности хрусталика в том случае, когда перед глазом воздух, луч идет ниже, чем в том случае, когда перед глазом вода. Поэтому, если в воде изображение удаленного предмета при ненапряженном глазе образуется на сетчатке, то в воздухе изображение этого предмета при ненапряженном глазе будет получаться перед сетчаткой. Следовательно, человек близорук.

♦

**Ф277.** *Определить период колебаний грузика C, шарнирно прикрепленного двумя очень легкими стержнями длины $l$ к стержню $AB$, укрепленному под углом $\alpha$ к горизонту (рис. 21, а). $\angle BAC = \angle ABC = \beta$. Трением пренебречь.*




Траекторией движения грузика будет часть окружности радиусом $r = l\sin\beta$, плоскость которой перпендикулярна стержню $AB$ и наклонена под углом $90° - \alpha$ к горизонтальной плоскости (рис. 21, б).

Запишем уравнение движения грузика, считая, что его отклонения от положения равновесия малы. Для этого нужно найти сумму проекций всех сил, действующих на грузик, на касательную к траектории движения грузика. Силы упругости $Q_1$ и $Q_2$, действующие на грузик со стороны стержней, лежат в плоскости стержней, перпендикулярной траектории грузика. Поэтому их проекции на касательную к траектории равны нулю.

Для того чтобы найти проекцию силы тяжести $mg$, разложим эту силу на составляющие (см. рис. 21, б) $F_1$, лежащую в плоскости траектории, и $F_2$, перпендикулярную к этой плоскости. Проекция силы $F_2$ на касательную к траектории грузика равна нулю, а проекция силы $F_1$ равна $F_1\sin\gamma$ (рис. 21, в). Так как $F_1 = mg\cos\alpha$, то величина этой проекции равна $mg\cos\alpha\sin\gamma$.

Теперь можно записать уравнение движения грузика вдоль траектории. При этом нужно учесть, как и при движении математического маятника, что ускорение грузика вдоль траектории направлено противоположно отклонению грузика от положения равновесия. Поэтому проекция силы тяжести и ускорение грузика имеют противоположные знаки. Следовательно,

$$ma_\tau = -mg\cos\alpha\sin\gamma.$$

Так как угол $\gamma$ мал, то $\sin\gamma \approx \gamma$ и можно записать, что

$$a_\tau = -(g\cos\alpha)\gamma.$$

Это уравнение совпадает с уравнением движения математического маятника, в котором ускорение свободного падения $g$ заменено на $g\cos\alpha$. Это означает, что период колебаний грузика равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g\cos\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\sin\beta}{g\cos\alpha}}.$$

*И. Ш. Слободецкий*

Рис. 21. *а, б* — маятник находится в положении равновесия. Рисунки сделаны в плоскости стержней. Плоскость колебания перпендикулярная плоскости рисунка, ее след показан красной штриховой линией.
*в* — плоскость рисунка совпадает с плоскостью колебаний.

В этом номере мы приводим список читателей, приславших верные решения задач **М256—М265** (жирные цифры после фамилии — последние две цифры номера решенной задачи). *О. Азимов* (Смоленск) **63**; *Д. Азов* (Челябинск) **56—59, 62, 63, 65**; *А. Александрин* (Валуйки Белгородской обл.) **59**; *В. Басманов* (Воронеж) **56, 59, 61—65**; *В. Бегларян* (Калинин) **58, 63, 64**; *А. Белоусов* (Сумгаит) **63**; *Р. Бикшев* (Орск) **63**; *В. Бильдин* (с. Молодия Черновицкой обл.) **56—58**; *А. Бирман* (Бутово Московской обл.) **62, 65**; *М. Бирман* (Саратов) **58, 63**; *А. Блох* (Харьков) **61—65**; *С. Бодров* (Реутово Московской обл.) **56**; *А. Бразма* (Елгава Латв. ССР) **62**; *А. Бузинов* (Днепропетровск) **62**; *В. Булавкин* (Елец) **56**; *Д. Вайсман* (Запорожье) **56**; *И. Вандануров* (Ленинград) **58**; *Ю. Виницкий* (Ташкент) **56, 58, 63, 65**; *В. Виноградов* (Владивосток) **56, 58**; *В. Витюков* (Орел) **63—65**; *А. Воеводский* (Богородицк Тульской обл.) **58**; *Л. Воробьев* (Витебск) **58**; *А. Ворович* (Москва) **58, 64**; *А. Выборнов* (Развилка Московской обл.) **62, 64**; *А. Вятчин* (Павлово Горьковской обл.) **56—59, 61, 62—65**; *Е. Галинский* (Ташкент) **58**; *Л. Ганчев* (Болгария) **63, 65**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **61, 63, 65**; *Р. Гибадуллин* (Бугульма Тат. АССР) **62, 63**; *В. Гожий* (Кишинев) **63**; *А. Гончаров* (Никополь) **56—59**; *Е. Горбатый* (Одесса) **56, 57, 59, 63—65**; *С. Горишний* (Таганрог) **56, 57, 59, 63, 65**; *О. Гриб* (Сумы) **63—65**; *А. Григорян* (Баку) **56—58**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **57, 58, 63, 64**; *А. Гулиев* (с. Сулейманлы Аз. ССР) **63**; *Л. Гурвиц* (Черновцы) **63**; **65**; *О. Гурская* (Москва) **58, 64**; *О. Гусарова* (Харьков) **63, 65**; *А. Гусейнов* (Акстафа Аз. ССР) **63**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **56, 59, 61—64**; *М. Даниелян* (Баку) **57**; *С. Данилов* (ст. Павловская Краснодарского края) **63**; *К. Данильченко* (Волгоград) **57, 63—65**; *А. Диденко* (Краснодар) **59, 62**; *Ю. Докучаев* (Ленинград) **63, 64**; *Э. Дяченко* (Андрушевка Житомирской обл.) **61—63, 65**; *С. Ефимов* (Наманган) **58**; *Г. Зайцев* (Хабаровск) **57, 63, 64**; *А. Заргарян* (Тбилиси) **57, 58, 63, 65**; *Я. Захаревич* (Ташкент) **57, 58**; *С. Золотарев* (Москва) **57, 63, 65**; *А. Зубков* (Красный Яр Омской обл.) **63**; *З. Ибашов* (Сальяны Аз. ССР) **63, 65**; *Ф. Ибрагимов* (Кривой Рог) **56, 63, 65**; *Т. Иванова* (Москва) **63, 64**; *В. Иващук* (Киев) **62—65**; *В. Игнатов* (Москва) **63**; *М. Имерлишвили* (Тбилиси) **56, 58, 59, 62, 63, 65**; *И. Калика* (Киев) **62—64**; *В. Калюжный* (Лермонтов Ставропольского края) **58**; *А. Касьянов* (Курск) **63**; *О. Катановский* (Москва) **63**; *П. Кацыло* (Москва) **56, 57, 59**; *Г. Квинакадзе* (Тбилиси) **58, 63, 64**; *П. Кикоть* (Москва) **58**; *Н. Киричук* (Луцк) **56**; *Л. Клименок* (Москва) **63, 65**; *А. Клочков* (Челябинск) **63, 64**; *В. Кобылецкий* (Баку) **56, 57, 59, 63, 64**; *И. Кокорин* (Сочи) **56**; *С. Коляда* (Киев) **56, 58, 63, 65**; *В. Комарицкий* (Магадан) **58**; *В. Конев* (Ангарск) **56, 63, 65**; *О. Копыжев* (Пржевальск) **64**; *В. Куликовский* (Москва) **56**; *А. Курляндчик* (Вильнюс) **56, 57, 59**; *А. Кутыркин* (Пенза) **62, 63**; *В. Лашин* (Гагарин) **64, 65**; *А. Лейдерман* (Могилев-Подольский Винницкой обл.) **61, 62, 64**; *Г. Лепешкина* (Актюбинск) **65**; *М. Липовский* (Волгоград) **56, 58**; *Л. Лисус* (Симферополь) **63, 64**; *М. Любич* (Харьков) **56—59, 61—65**; *Г. Люсов* (Тейково Ивановской обл.) **62**; *В. Мигунов* (Обнинск Калужской обл.) **63**; *Л. Михлин* (Курск) **63**; *И. Мощук* (Новосибирск) **56, 58, 63—65**; *А. Мучник* (Жданов) **63**; *В. Небогатов* (Бобровка Восточно-Казахстанской обл.) **64**; *О. Окунев* (Казань) **64**; *С. Охитин* (Оренбург) **56, 58, 62—64**; *Е. Павленко* (Армавир) **63**; *И. Панин* (Апатиты) **58, 62, 64**; *М. Панченко* (Бровары) **58**; *Е. Парилис* (Ташкент) **63—65**; *Т. Пастухова* (Уфа) **65**; *Б. Певзнер* (Москва) **57, 63, 65**; *И. Пенков* (Москва) **56, 58, 63, 64**; *Н. Пивторак* (с. Соколовка Винницкой обл.) **61, 63**; *А. Плахов* (Москва) **56, 58, 61, 63—65**; *Т. Поборцева* (Орша) **64**; *В. Пойда* (с. Голятин Закарпатской обл.) **64, 65**; *М. Половинник* (Мена Черниговской обл.) **58, 59, 63**; *Н. Поляков* (п/о Сизый Бугор Астраханской обл.) **63**; *Р. Портной* (Черновцы) **57, 63—65**; *С. Послазский* (Харьков) **56, 58, 59**; *М. Райтер* (Ленинград) **56, 57, 59, 62—65**; *С. Рашеев* (Солнечногорск Московской обл.) **61, 63**; *А. Резников* (Киев) **63—65**; *А. Рейбольд* (с. Соколовка Северо-Казахстанской обл.) **59, 64**; *Ф. Рожков* (Рязань) **63, 65**; *В. Романов* (Димитровград) **57, 58, 64, 65**; *Е. Романовский* (Киев) **56, 58, 62, 63, 65**; *Л. Рубинштейн* (Калининград) **56, 57, 59**; *А. Ряхин* (Калинин) **63, 64**; *В. Свиридов* (п/о Рамонь Воронежской обл.) **62—64**; *Т. Седрединов* (Куруш ДАССР) **63—65**; *М. Ситников* (Москва) **64**; *Ю. Скрынников* (Рустави) **64, 65**; *В. Смелянский* (Севастополь) **56, 58**; *С. Солнцев* (Киев) **63, 65**; *С. Соловьев* (Орел) **61, 63, 65**; *В. Тарасов* (Ленинград) **62, 63**; *В. Татаренко* (Киев) **63**; *С. Тимошин* (Кировоград) **62, 64**; *В. Ткачук* (Выкса Горьковской обл.) **56—59, 61—65**; *С. Трегуб* (Ташкент) **57**; *М. Тумашян* (Ереван) **65**; *А. Туровский* (Псков) **61, 63—65**; *И. Федяк* (Парища Ивано-Франковской обл.) **63**; *С. Финашин* (Ленинград) **56, 59**; *В. Фомин* (Орск) **63**; *И. Фомина* (Харьков) **56, 58, 63, 65**; *С. Харовский* (с. Великие Черноконцы Тернопольской обл.) **58**; *А. Хомич* (Брест) **57—59, 62**; *И. Цукерман* (Ленинград) **57, 59**; *Г. Черный* (Бровары) **62, 63**.

*Ю. П. Лысов*

Окончание списка будет опубликовано в следующем номере.

# ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

**Какие вопросы и задачи могут ожидать поступающего на приемных экзаменах? Как эти экзамены проходят? В чем состоят типичные недостатки ответов абитуриентов? Чему при подготовке уделить внимание в первую очередь и как наиболее эффективно организовать повторение?**

**Ответам на эти вопросы посвящены материалы нашего традиционного раздела «Практикум абитуриента». Здесь читатель найдет статьи по отдельным темам и наиболее важным или трудным вопросам программы вступительных экзаменов по физике и математике, условия и разбор задач вариантов, предлагавшихся в прошлом году абитуриентам различных вузов страны, информацию о книгах в помощь поступающим и т. д.**

**Подчеркнем, что материалы «Практикума абитуриента» не могут заменить собой школьные учебники, да и не ставят перед собой такой цели. В публикуемых статьях читатели найдут по возможности углубленное, подробное изложение лишь нескольких теоретических вопросов, сопровождаемое, однако, разбором задач, взятых из практики приемных экзаменов. Намечая темы статей, редакция использовала опыт вступительных экзаменов и учитывала соображения и предложения, содержащиеся в обширной редакционной почте. Читателям, конечно, будет полезно познакомиться и с теми материалами «Практикума абитуриента», которые уже публиковались в журнале в прошлые годы. Подробный тематический список статей для поступающих за 1970—1973 годы помещен в «Кванте» № 1, 1974 г., с. 52.**

**Многие наши читатели, особенно те, кто окончил школу несколько лет назад, интересуются вопросом, как отразился происходящий сейчас переход к новым программам по математике и физике в школе на содержании программ вступительных экзаменов.**

**Напомним, что в 1972 году программа вступительных экзаменов по математике была пересмотрена, но по содержанию она полностью соответствует старому курсу средней школы. Эта программа действует и сейчас. Она содержит перечень основных математических понятий, которыми должен владеть поступающий, теорем, которые необходимо уметь доказывать, и формул, которые надо уметь выводить. Кроме того, в программе охарактеризованы основные математические умения и навыки, которыми должен владеть абитуриент. Никаких знаний сверх программы от поступающих не требуется. В частности, не предусматривается знакомство абитуриентов с понятиями производной, интеграла, с основами математического анализа, с элементами векторного исчисления и т. п.**

**Программа вступительных экзаменов по физике также полностью соответствует старому курсу средней школы.**

**Мы надеемся, что знакомство с вариантами вступительных экзаменов даст возможность будущим абитуриентам конкретно представить себе, что такое письменный экзамен по физике и математике в университетах, педагогических и технических вузах. Эти варианты — удобный повод заранее попробовать свои силы в решении определенного набора задач за фиксированное время.**

**Залог успеха на вступительных экзаменах — систематическая и регулярная самостоятельная работа. Необходимо повторить и активно закрепить теоретический материал, получить достаточную практику в решении задач. Для этого нужно время. Поэтому начинайте готовиться к приемным экзаменам, не откладывая, особенно если вы собираетесь поступать в институт уже через полгода!**

*Г. В. Дорофеев*

# Отношения отрезков, площадей и объемов

**Программа школьного курса геометрии построена, как известно, так, что учащиеся девятых и десятых классов решают в основном задачи по стереометрии, а планиметрические задачи появляются в их практике лишь в связи с применением тригонометрии. Это, конечно, совершенно естественно, однако на вступительных экзаменах такое положение вещей сказывается далеко не лучшим образом: поступающие, неплохо справляясь с задачами, поддающимися прямому (иногда весьма громоздкому) тригонометрическому расчету, становятся в тупик перед сравнительно простыми задачами, для решения которых требуется лишь активное владение стандартными и, в общем, хорошо им известными теоремами планиметрии.**

**Отсюда вытекает очевидный вывод: при подготовке к вступительным экзаменам особое внимание следует уделить активизации геометрических знаний, полученных еще в 6—8-х классах, следует решать больше задач, требующих «чисто геометрических» идей.**

**Подчеркнем сразу же, что здесь не идет речи о каком-то противопоставлении чисто геометрических и тригонометрических методов решения задач. Напротив, наиболее успешным может быть именно их разумное сочетание, и тогда на экзаменах не будет встречаться стремление с помощью головоломных вычислений решить простую геометрическую задачу или, наоборот, рассматривать многочисленные подобные треугольники в задачах, где введение тригонометрических функций является естественным и оправданным путем к решению. Научиться разумно сочетать эти методы — главная задача при подготовке к вступительным экзаменам.**

**В этой статье мы рассмотрим задачи, связанные с делением отрезков, площадей и объемов в некотором отношении. Мы убедимся, что задачи подобного рода совсем не сложны и, во всяком случае, их объективная сложность не соответствует тем затруднениям, которые они обычно вызывают у поступающих.**

Начнем с совсем простой задачи, которую, однако, решили совсем немногие поступающие.

З а д а ч а 1 (МГУ, геологич. ф-т, 1964). *Точка $K$ делит медиану $AD$ треугольника $ABC$ в отношении* $3:1$, *считая от вершины. В каком отношении прямая $BK$ делит площадь треугольника $ABC$?*

Не составляет труда заметить, что треугольники $BAE$ и $BEC$ (рис. 1) имеют общую вершину, и их основания лежат на одной прямой, так что искомое отношение их площадей равно отношению длин отрезков $AE$ и $EC$, и таким образом, требуется узнать, в каком отношении прямая $BE$ делит сторону $BC$.

Представляется совершенно очевидным, что прямой вычислительный путь (ввести, например, вспомога-

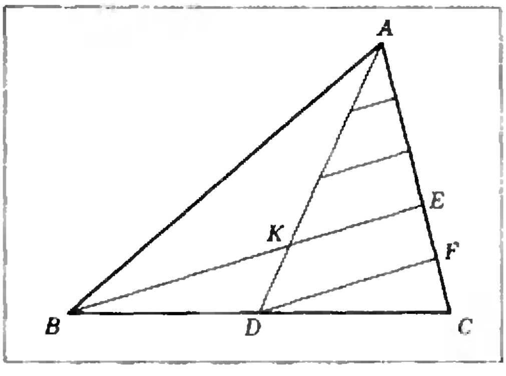



Рис. 1.

тельные элементы — длины сторон или величины углов) связаи с большими трудностями и вряд ли приведет к успеху. В то же время естественно отыскивается чисто геометрическая идея решения. В самом деле, нам нужно узнать, в каком отношении делится одна сторона угла $DAC$, а известно, что его вторая сторона разделена на 4 равных отрезка. И теперь уже не может не прийти на память теорема о делении сторон угла параллельными прямыми, и уж, конечно, совершенно естественно провести через точки деления медианы прямые, параллельные $BK$. Тогда на стороне $AC$ возникают четыре равных отрезка. Что же касается пятого отрезка $FC$, то ведь еще надо воспользоваться тем, что $AD$ — медиана, так что $DF$ — средняя линия треугольника $BCE$, и следовательно, $FC = EF$.

Таким образом, сторона $AC$ разделена на 5 равных отрезков, и искомое отношение равно $3:2$.

Если дополнительно обдумать предложенное решение, то станет ясно, что таким же способом можно решить и более общую задачу: вместо отношения $3:1$ можно рассмотреть произвольное деление отрезка $AD$, и более того, в решении существенно не то, что $AD$ — медиана, а лишь то, что точка $D$ делит $BC$ в известном отношении.

Решите самостоятельно эту более общую задачу.

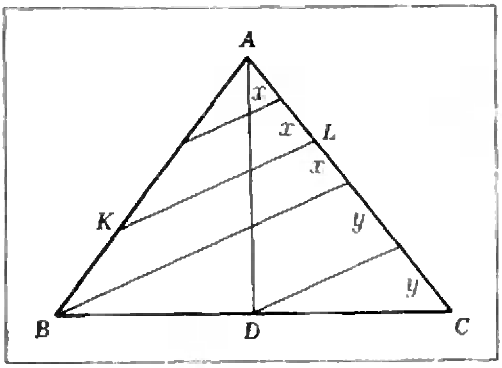



Рис. 2.

Задача 2. *На боковых сторонах $AB$ и $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ взяты точки $K$ и $L$ так, что $AK:KB = 2$, $AL:LC = 1/2$. В каком отношении прямая $KL$ делит высоту $AD$?*

Идея решения этой задачи — та же, что и предыдущей, а само решение очевидно из рисунка 2: искомое отношение равно $2x:(x+y)$, а по условию $\frac{2x}{x+2y} = \frac{1}{2}$, откуда $3x = 2y$, и следовательно,

$$\frac{2x}{x+y} = \frac{2}{1+\frac{y}{x}} = \frac{4}{5}.$$

И снова оказывается, что фактически мы решали более общую задачу: равенство сторон треугольника $ABC$ понадобилось нам лишь для того, чтобы считать высоту $AD$ медианой, так что аналогичным способом можно решать задачу для произвольного треугольника, в котором известно, в каком отношении делят его стороны точки $D$, $K$ и $L$.

Очень часто в задачах, предлагаемых поступающим, возникает необходимость вычислить площадь отсекаемой части многоугольника или объем отсекаемой части многогранника, если каким-то образом заданы точки деления сторон или ребер. В этих задачах чрезвычайно полезны следующие утверждения:

(1) *Если в треугольнике $ABC$ $AK = \alpha AB$, $AL = \beta AC$, то*

$$S_{\triangle AKL} = \alpha\beta S_{\triangle ABC}.$$

(2) *Если в треугольной пирамиде $SABC$ $SK = \alpha SA$, $SL = \beta SB$, $SM = \gamma SC$, то $V_{SKLM} = \alpha\beta\gamma V_{SABC}$.*

Утверждение (1) наиболее просто доказывается применением формулы площади треугольника $S = \frac{1}{2} bc \sin A$, а утверждение (2) — методом «последовательного отсечения»: от пирамиды $SABC$ надо перейти к пирамиде $SABM$, затем к $SALM$ и к $SKLM$. Эта идея приводит к простому решению следующей задачи.

Задача 3 (МГУ, геологич. ф-т, 1968). *В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $AD$ и $CF$ углов $BAC$*

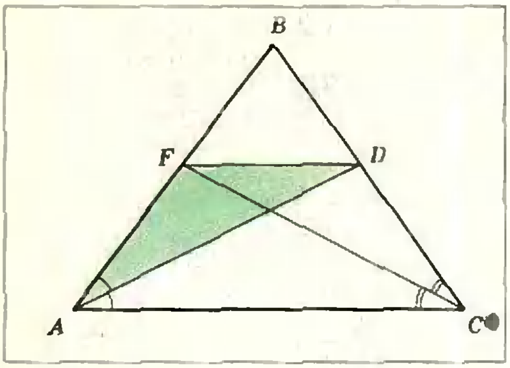



Рис. 3.

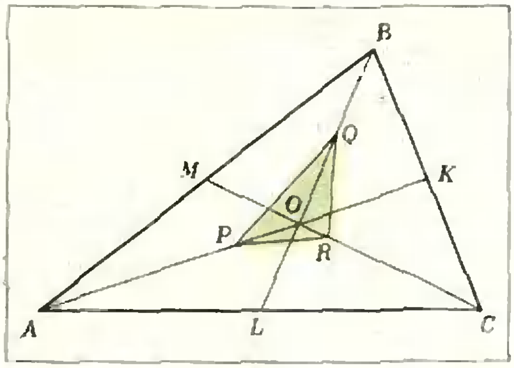



Рис. 4.

*и ACB. Найти отношение площадей треугольников ABC и AFD, если $AB = 21$, $AC = 28$, $CB = 20$.*

Треугольник $AFD$ (рис. 3) может быть получен из $ABC$ следующим образом: сначала отсекается треугольник $ADB$, а от него — треугольник $AFD$. Для подсчета искомого отношения воспользуемся теоремой о том, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположные стороны на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Имеем

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} = \frac{3}{4}, \quad \frac{BF}{FA} = \frac{BC}{CA} = \frac{5}{7},$$

откуда (с помощью производных пропорций)

$$\frac{BD}{BC} = \frac{3}{7}, \quad \frac{BF}{BA} = \frac{5}{12}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle AFD} = \frac{7}{12} \cdot S_{\triangle ABD} = \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{7} \times$$

$$\times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC},$$

так что искомое отношение равно 4.

Задача 4 (МГУ, биологич. ф-т, 1970). *Дан треугольник ABC площади 1. На его медианах AK, BL и CM взяты соответственно точки P, Q и R так, что*

$$AP = PK, \; BQ = \frac{1}{2} QL, \; CR = \frac{5}{4} RM.$$

*Найти площадь треугольника PQR.*

Пусть $O$ — точка пересечения медиан (рис. 4); искомую площадь подсчитаем как сумму площадей трех маленьких треугольников с вершиной $O$. Треугольник $OPQ$ получается из треугольника $OAB$ отсечением на его сторонах отрезков $OP$ и $OQ$; при этом $AP = \frac{1}{2} AK$, $AO = \frac{3}{2} AK$, так что $OP = \frac{1}{6} AK = \frac{1}{4} AO$. Аналогично, $OQ = \frac{1}{2} OB$, поэтому

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{8} S_{\triangle OAB}.$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$, так что

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{24}.$$

Подсчитав аналогично площади треугольников $OPR$ и $OQR$, получаем, что $S_{\triangle PQR} = \frac{1}{12}$.

Задача 5 (МГУ, химич. ф-т, 1970). *В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, у которой $AC = 6$, $AA_1 = 8$, через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра $BB_1$ и $CC_1$ соответственно в точках M и N. В каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если $BM = MB_1$, а AN — биссектриса угла $CAC_1$?*

Легко видеть, что отношение объемов пирамид $ACBMN$ и $ACBB_1C_1$ равно отношению площадей их оснований, а для нахождения этого отношения следует найти, в каком отношении делит точка $N$ ребро $CC_1$

(рис. 5). Последнее отношение легко находится: по теореме Пифагора $AC_1 = 10$ и по теореме о биссектрисе $CN : NC_1 = 3 : 5$.

Теперь нетрудно подсчитать, что $S_{CBMN} : S_{CBB_1C_1} = 7 : 16$, и поэтому

$$V_{ACBMN} = \frac{7}{16} V_{ACBB_1C_1}.$$

С другой стороны, пирамида $ACBB_1C_1$ дополняется до всей призмы пирамидой $AA_1B_1C_1$, объем которой составляет $^1/_3$ объема призмы, так что объем пирамиды $ACBB_1C_1$ равен $^2/_3$ объема призмы. Следовательно, объем пирамиды $ACBMN$ составляет $^7/_{24}$ объема призмы, и искомое отношение равно $7 : 17$.

Задача 6 (МГУ, ф-т вычислительной математики и кибернетики, 1973). *Сфера проходит через точки $A$, $B$, $C$, $D$ и пересекает отрезки $SA$, $SB$, $SC$ и $SD$ в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ соответственно. Известно, что* $SD_1 = 9/4$, $DD_1 = 47/36$, *отношение площадей треугольников $SA_1B_1$ и $SAB$ равно* $15 : 32$, *отношение объемов пирамид $SB_1C_1D_1$ и $SBCD$ равно* $1701 : 4096$, *а отношение объемов пирамид $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ равно* $105 : 256$. *Найти отрезки $SA_1$, $SB_1$, $SC_1$.*

Легко понять, что в задаче речь идет о четырехугольной пирамиде $SABCD$, на ребрах которой взяты точки $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ (рис. 6). Для решения задачи запутанные данные об отношениях площадей и объемов сведем к отношениям соответствующих отрезков.

Составив систему равенств

$$\frac{SA_1}{SA}\cdot\frac{SB_1}{SB} = \frac{15}{32}, \quad \frac{SB_1}{SB}\cdot\frac{SC_1}{SC}\cdot\frac{SD_1}{SD} = \frac{1701}{4096},$$

$$\frac{SA_1}{SA}\cdot\frac{SB_1}{SB}\cdot\frac{SC_1}{SC} = \frac{105}{256}$$

и учитывая, что $SD_1 : SD = 81 : 128$, находим

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{5}{8}, \quad \frac{SB_1}{SB} = \frac{3}{4}, \quad \frac{SC_1}{SC} = \frac{7}{8}.$$

С другой стороны, отрезки $SA$, $SB$, $SC$, $SD$ являются секущими к сфере, о которой идет речь в условии задачи, и поэтому произведения этих секущих на их внешние части равны все квадрату касательной к сфере, проведенной из точки $S$ (здесь мы пользуемся очевидным, но не доказанным утверждением о касательной и секущей для сферы, *аналогия* его с соответствующим утверждением для окружности не является, разумеется, доказательством; докажите это утверждение самостоятельно). Таким образом, $SA_1\cdot SA = SB_1\cdot SB = SC_1\cdot SC = SD_1\cdot SD = \frac{9}{4}\cdot\frac{128}{36} = 8$.

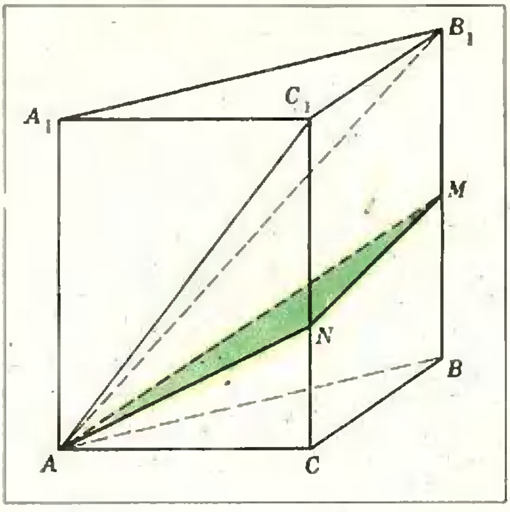



Рис. 5.

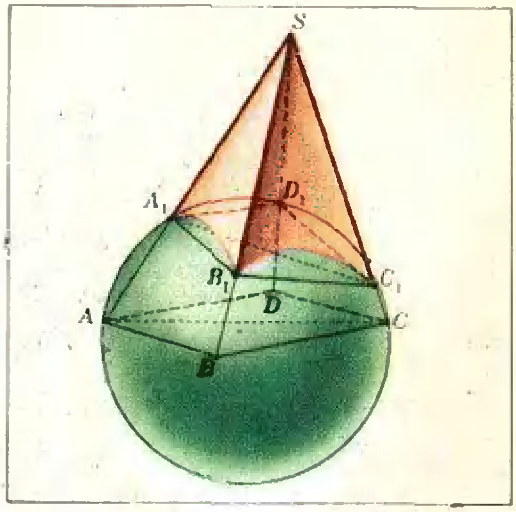



Рис. 6.

Теперь не составляет труда найти требуемые отрезки:

$$SA_1=\sqrt{5},\ SB_1=\sqrt{6},\quad SC_1=\sqrt{7}.$$

Упражнения

1 (МГУ, биологич. ф-т, 1970). На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ площади 1 взяты точки: $K$ на $AB$, $L$ на $BC$, $M$ на $CD$ и $N$ на $DA$. При этом $AK:KB=2:1$, $BL:LC=1:3$, $CM:MD=1:1$, $DN:NA=1:5$. Найти площадь шестиугольника $AKLCMN$.

2 (МГУ, биологич. ф-т, 1972). В треугольнике $ABC$ биссектрисы $AD$ и $BE$ пересекаются в точке $O$. Найти отношение площади треугольника $ABC$ к площади четырехугольника $ODCE$, зная, что $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

3 (МГУ, химич. ф-т, 1972). В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен 45°, а угол $C$ острый. Из середины стороны $BC$ опущен перпендикуляр $NM$ на сторону $AC$. Площади треугольников $NMC$ и $ABC$ относятся как $1:8$. Найти углы треугольника $ABC$.

4 (МГУ, биологич. ф-т, 1972). В параллелограмме $ABCD$ точка $E$ делит пополам сторону $CD$, биссектриса угла $ABC$ пересекает отрезок $AE$ в точке $O$. Найти площадь четырехугольника $OBCE$, зная, что $AD=a$, $DE=b$, $\angle ABO=\alpha$.

5 (МГУ, химич. ф-т, 1970). Плоскость пересекает боковые ребра $SA$, $SB$, $SC$ пирамиды $SABC$ в точках $K$, $L$, $M$ соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если $SK:KA=SL:LB=2:1$, а медиана $SN$ треугольника $SBC$ делится этой плоскостью пополам?

6 (МГУ, химич. ф-т, 1970). Плоскость пересекает ребра $A_1B_1$, $B_1C_1$ и $BC$ треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в точках $M$, $N$ и $P$ соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если $B_1M:A_1B_1=1:2$, $B_1N:B_1C_1=2:3$, $BP:CB=1:3$?

7. Сформулируйте утверждения 1 и 2 из статьи (с. 56) для случая, когда точки $K$, $L$, $M$ лежат не на самих сторонах (ребрах), а на их продолжениях.

8. (МГУ, ф-т вычислительной математики и кибернетики, 1973). Точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ лежат на сфере радиуса $\sqrt{2}$. Отрезки $AD$, $BE$ и $CF$ пересекаются в точке $S$, находящейся на расстоянии 1 от центра сферы. Объемы пирамид $SABC$ и $SDEF$ относятся как $1:9$, пирамид $SABF$ и $SDEC$ как $4:9$, пирамид $SAEC$ и $SDBF$ как $9:4$. Найти отрезки $SA$, $SB$, $SC$.

9. Точки $K$, $L$, $M$ делят стороны $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ соответственно в отношении $\alpha:\beta$, $\gamma:\delta$, $\rho:\sigma$ (считая каждый раз от вершины, упомянутой первой), причем $\alpha+\beta=\gamma+\delta=\rho+\sigma=1$. В каком отношении прямая $KM$ делит отрезок $AL$? В каком отношении прямая $BM$ делит $CK$?

# Квадраты из монет

1. На плоскости расположено 9 одинаковых монет так, как показано на рисунке 1.

Какое минимальное число монет нужно убрать, чтобы не осталось ни одного квадрата с вершинами в центрах монет?

Рис. 1.

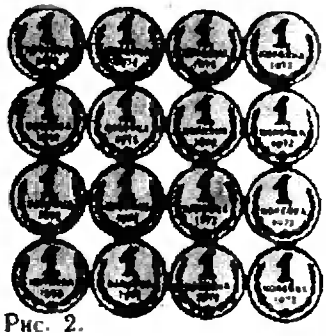


Рис. 2.

2. Та же задача, если монет 16, и они расположены так, как показано на рисунке 2.

*В. Е. Колков*

# Задачи о воздушных шарах

*Л. П. Баканина*

В наш век самолетов и ракет, для которых доступны любые высоты над поверхностью Земли, воздушные шары, громоздкие, ненадежные и неуправляемые, уже отошли в прошлое, хотя когда-то именно они дали человеку возможность подняться в воздух. Впрочем, в некоторых случаях воздушные шары очень удобны, они используются и сейчас. Например, с аэростата удобно обучать прыжкам с парашютом, а метеорологи исследуют давление, температуру и воздушные потоки в атмосфере с помощью шаров-зондов.

Задачи о воздушных шарах даются иногда на вступительных экзаменах. Обычно их можно разделить на два типа:

1) задачи, в которых нужно найти связь между габаритами и наполнением шара и подъемной силой, действующей на шар у поверхности Земли;

2) задачи, в которых нужно определить максимальную высоту подъема шара; при этом задается какая-нибудь модель атмосферы, то есть закон изменения давления и температуры с высотой.

По существу, задачи обоих типов — это задачи на статику. Для их решения нужно уметь применять уравнение состояния газов и найти условие равновесия шара, на который действует сила притяжения Земли и выталкивающая сила со стороны окружающего шар воздуха. Если выталкивающая сила больше силы притяжения (разность этих сил называют подъемной силой), шар поднимается вверх. Но по мере подъема уменьшается плотность окружающего воздуха, а следовательно, уменьшается и выталкивающая сила, по закону Архимеда равная

$$F = \rho g V,$$

где $\rho$ — плотность воздуха, а $V$ — объем шара. На некоторой высоте выталкивающая сила окажется равной силе притяжения — это и будет максимальной высотой подъема шара.

Разберем теперь несколько конкретных задач, которые в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

З а д а ч а 1. *Сферическая оболочка воздушного шара сделана из материала, квадратный метр которого имеет массу $b = 1$ кг/м². Шар наполнен гелием при нормальном атмосферном давлении. При каком минимальном радиусе шар поднимает сам себя? Температура гелия и температура окружающего воздуха одинаковы и равны 0 °С. Молекулярная масса воздуха 29 кг/кмоль, молекулярная масса гелия 4 кг/кмоль.*

При увеличении радиуса шара выталкивающая сила растет пропорционально кубу радиуса, а вес оболочки — пропорционально квадрату радиуса. Следовательно, выталкивающая сила растет быстрее и, начиная с какого-то значения радиуса, станет больше, чем вес оболочки. Тогда шар начнет подниматься. Обозначим этот радиус оболочки через $r$. При этом

$$\rho_в \cdot g\,\frac{4}{3}\pi r^3 = bg\cdot 4\pi r^2 + \rho_{He}\cdot g\,\frac{4}{3}\pi r^3,$$

откуда

$$r = 3\,\frac{b}{\rho_в - \rho_{He}}.$$

Плотности воздуха $\rho_в$ и гелия $\rho_{He}$ при данных условиях найдем с помощью закона Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$:

$$\rho_в = \frac{m}{V} = \frac{p\mu_в}{RT},$$

$$\rho_{He} = \frac{p\mu_{He}}{RT}; \quad \rho_в - \rho_{He} = \frac{p}{RT}(\mu_в - \mu_{He}).$$

Окончательно получаем

$$r = \frac{3b \cdot RT}{p(\mu_в - \mu_{He})} \approx 2{,}8\ м.$$

Задача 2. *Объем воздушного шара равен $V = 230\ м^3$, масса оболочки $M = 145\ кг$. Шар наполнен горячим воздухом при нормальном атмосферном давлении. Какую температуру должен иметь воздух внутри оболочки, чтобы шар начал подниматься? Температура наружного воздуха $t_0 = 0\ °C$.*

При нагревании воздуха его плотность уменьшается, так как $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ (см. задачу 1). Шар начнет подниматься, если $\rho_0 gV \geqslant Mg + \rho gV$ ($\rho_0$ — плотность наружного воздуха). Подставляя выражения для плотности наружного воздуха и воздуха внутри шара $\rho$, получаем

$$\frac{pV\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) \geqslant M.$$

Отсюда

$$1 - \frac{T_0}{T_{min}} = \frac{MRT_0}{\mu pV} \approx 0{,}5,$$

значит,

$$T_{min} \approx 2T_0 = 546\ °K = 273\ °C.$$

Задача 3. *Для удержания на поверхности Земли метеорологического шара-зонда с массой $M = 20\ кг$ необходимо приложить силу $F = 1000\ н$. Шар поднимается до такой высоты, где его объем увеличивается в два раза. Температура воздуха, измеренная на этой высоте с помощью зонда, оказалась равной $t = -43\ °C$. Вычислить давление воздуха на этой высоте, если на поверхности Земли давление $p_0 = 754\ мм\ рт.\ ст.$, а температура $t_0 = +17\ °C$.*

Условие равновесия шара у поверхности Земли записывается так:

$$F = \rho_0 gV - Mg. \qquad (1)$$

где $V$ — объем шара у поверхности Земли, а $\rho_0 = \frac{\mu p_0}{RT}$ — плотность воздуха. При этом масса шара $M$ включает в себя массу оболочки, приборов и газа, заключенного внутри оболочки. Из условия известно, что объем шара при подъеме увеличивается. Следовательно, оболочка шара мягкая и герметичная. Объем увеличивается потому, что при мягкой оболочке давление газа внутри должно быть таким же, как давление окружающего воздуха, которое уменьшается с высотой. Если оболочка герметичная, масса шара не изменяется при подъеме и максимальная высота его подъема определяется условием

$$\rho g \cdot 2V = Mg, \qquad (2)$$

где $\rho = \frac{\mu p}{RT}$. Решая совместно уравнения (1) и (2), находим

$$p = p_0 \frac{T}{2T_0(1 + F/Mg)} \approx 79\ мм\ рт.\ ст.$$

Задача 4. *Шар-зонд, наполненный водородом, имеет герметичную оболочку постоянного объема $V = 50\ м^3$. Масса шара вместе с водородом $M = 5\ кг$. Определить, на какую максимальную высоту он сможет подняться, если известно, что атмосферное давление уменьшается в два раза через каждые $h = 5\ км$ высоты. Температура в стратосфере $t = -60\ °C$. Молекулярная масса воздуха 29 кг/кмоль. Давление у поверхности Земли $p_0 = 1\ атм$.*

На максимальной высоте выталкивающая сила равна весу шара-зонда:

$$Mg = \rho gV.$$

Выразив плотность окружающего воздуха через давление и температуру, получим

$$M = \frac{\mu p}{RT} V.$$

Таким образом, давление воздуха на

этой высоте равно

$$p = \frac{M}{\mu}\frac{RT}{V} \approx 6{,}12\cdot 10^3\ н/м^2.$$

Посмотрим теперь, во сколько раз давление $p$ меньше давления у поверхности Земли $p_0$: $\frac{p_0}{p} \approx 16$.

Из условия известно, что давление падает в два раза через каждые 5 *км* подъема, то есть $p_0/p = 2^{H/h}$, где $H$ — высота подъема, а $h = 5$ *км*. В нашем случае

$$2^{H/h} = 16 = 2^4.$$

Отсюда

$$H = 4h = 20\ км.$$

Задача 5. *Нерастяжимая оболочка шара-зонда объема $V = 75\ м^3$ имеет в нижней части небольшое отверстие. Масса оболочки $m = 7$ кг. Шар наполнен водородом. Определить, на какую максимальную высоту сможет подняться этот шар-зонд, если известно, что атмосферное давление уменьшается в два раза через каждые $h = 5$ км высоты. Температура воздуха в стратосфере $t = -60$ °C, температура водорода равна температуре окружающего воздуха. Давление у поверхности Земли $p_0 = 1$ атм.*

Эта задача отличается от предыдущей тем, что оболочка шара не герметична, а имеет отверстие. Следовательно, давление внутри шара все время равно давлению в атмосфере, и по мере увеличения высоты подъема шара водород вытекает из отверстия. Будем считать, что подъем происходит достаточно быстро и можно пренебречь диффузией воздуха внутрь оболочки, тогда условие равновесия шара на максимальной высоте

$$mg + \rho_{H_2} gV = \rho_в gV.$$

Плотности водорода и воздуха можно найти из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$\rho_{H_2} = \frac{\mu_{H_2} p}{RT}, \quad \rho_в = \frac{\mu_в p}{RT}.$$

Таким образом, давление на максимальной высоте

$$p = \frac{mRT}{(\mu_в - \mu_{H_2})V} \approx 6{,}12\cdot 10^3\ н/м^2.$$

Отношение $\frac{p_0}{p} = 16$, и следовательно, высота подъема $H = 20$ *км* (см. решение предыдущей задачи).

Высота подъема в задаче 5 получилась такая же, как для герметичного шара в задаче 4, но не следует забывать, что мы рассматривали разные шары, с разными объемами и массами. А если оба шара совершенно одинаковы и отличаются только тем, что у одного оболочка герметичная, а у другого имеет отверстие,— какой из шаров поднимется выше в этом случае?

Выталкивающая сила будет одинакова для обоих шаров, так как их объемы равны. Если начальные массы шаров были одинаковы, то после подъема шар с отверстием окажется легче, так как часть наполняющего его газа вытечет при подъеме. Следовательно, шар с отверстием сможет подняться на бóльшую высоту.

Обычно человеку, впервые задумавшемуся над этим вопросом, такой результат кажется странным. Часто задают вопрос: «Как вообще в шаре с отверстием возникает подъемная сила? Ведь снизу, там, где отверстие, воздух и газ внутри шара находятся в равновесии».

Давайте рассмотрим верхнюю точку шара. Если в нижней точке шара давление воздуха и газа равно $p_0$, в верхней точке давление воздуха $p_1 = p_0 - \rho_в gh$, а давление газа $p_2 = p_0 - \rho_г gh$ ($h$ — высота шара). Если $\rho_г < \rho_в$, то $p_2 > p_1$ и, следовательно, на оболочку снизу действует большая сила, чем сверху — возникает подъемная сила. Легко убедиться (вы сможете это сделать сами для тела достаточно простой формы), что именно эта разница давлений и дает результирующую выталкивающую силу, определяемую законом Архимеда. Недоумение часто возникает потому, что при расчетах плотности газа внутри шара обычно считают давление в шаре всюду одинаковым. Не нужно забывать, что это всего лишь приближение. Если мы определяем саму величину

$$p_2 = p_0 - \rho_г g h,$$

то, так как $h$ мало — всего несколько метров, $\rho_г g h \ll p_0$, и мы можем считать $p_2 \approx p_0$. Если же нас интересует разность

$$p_2 - p_1 = \rho_г g h - \rho_в g h,$$

то здесь оба члена одинаковы по порядку величины, и учитывать их надо оба. Кстати сказать, то, что мы считаем $\rho_в$ и $\rho_г$ постоянными,— тоже приближение, на самом деле они уменьшаются с высотой по мере уменьшения давления. Но учет этого обстоятельства дал бы значительно меньшую поправку к выталкивающей силе, этой поправкой можно пренебречь.

### Упражнения

1. Определить подъемную силу воздушного шара, в котором находится *m г* водорода. Оболочка шара герметичная и сделана из легкого неупругого материала, который может свободно растягиваться.

2. На сколько градусов надо нагреть воздух внутри сообщающегося с атмосферой воздушного шара, сферическая оболочка которого имеет диаметр 10 *м* и весит 10 *кг*, для того чтобы шар взлетел? Атмосферное давление 735 *мм. рт. ст.*, температура окружающего воздуха +27 °C.

3. Воздушный шар представляет собой баллон постоянного объема, наполненный гелием. Через отверстие в нижней части шар сообщается с атмосферой. Как изменится максимальная высота подъема шара, если гелий нагреть до температуры $T_1$? Температуру атмосферы считать постоянной и равной $T_0$, а давление изменяющимся по закону $p = p_0(1 - ah)$, где $a$ — постоянная, $h$ — высота подъема, $p_0$ — давление у поверхности Земли.

# Геометрические задачи

1. Высоты $AK$, $BL$ и $CM$ остроугольного треугольника $ABC$ продолжены до пересечения с описанной окружностью в точках $D$, $E$, $F$ соответственно. Пусть $P$, $Q$, $R$ — такие точки окружности, что $\smile AP = \frac{1}{3} \smile ABD$, $\smile BQ = \frac{1}{3} \smile BCE$, $\smile CR = \frac{1}{3} \smile CAF$, причем все дуги имеют одно и то же направление. Доказать, что $\smile AR = \frac{1}{3} \smile ACD$, $\smile CQ = {}^1/_3 \smile CBF$, $\smile BP = {}^1/_3 \smile BAE$, а треугольник $PQR$ — равносторонний.

2. Дана трапеция $ABCD$ с параллельными сторонами $AB$ и $CD$, $AB < CD$. Циркулем и линейкой построить точку $H$ на боковой стороне трапеции такую, что прямая $HK$, параллельная основанию трапеции, делит ее на части, площади которых относятся так $m : n$.

3. Пусть $O$ — центр окружности, описанной вокруг треугольника $ABC$, $R$ — ее радиус, $H$ — точка пересечения высот треугольника $ABC$ и $U$, $V$, $W$ — точки пересечения описанной окружности с прямыми $AH$, $BH$ и $CH$. Доказать, что прямые, проведенные через точки $U$, $V$, $W$ параллельно прямым $OA$, $OB$ и $OC$ соответственно, пересекаются в одной точке $P$. Доказать также, что если $H'$ — точка на продолжении отрезка $OH$, такая, что $OH = HH'$, то $PH' = \frac{OH^2}{R^2}$.

4. Построить вписанный в окружность треугольник, зная одну его вершину $A$ и точку $H$ пересечения высот треугольника.

5. Заданы окружность, прямая линия $AB$ и точка $X$ на прямой. Построить окружность, касающуюся прямой $AB$ в точке $X$, так, чтобы общая касательная данной и проведенной окружностей имела заданную длину $l$.

*Н. В.*

# Московский инженерно-физический институт

Подробно о Московском ордена Трудового Красного Знамени инженерно-физическом институте мы рассказывали в «Кванте» № 1 за 1973 год.
Ниже приводятся варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в 1974 году. Содержание теоретических вопросов по физике полностью соответствует программе вступительных экзаменов для поступающих в вузы.

**Математика**

### Вариант 1

1. Из пункта $A$ отправилась моторная лодка вверх по Волге, а из пункта $B$ одновременно вышел плот по течению. Через $a$ часов они встретились и далее двигались без остановок. Дойдя до пункта $B$, лодка, не задерживаясь, повернула обратно и догнала плот в пункте $A$. Предполагается, что собственная скорость лодки была все время неизменной. Сколько времени находились в плавании плот и лодка?

2. Радиус основания конуса равен $r$, а образующая наклонена к плоскости основания под углом $\varphi$; около этого конуса описана пирамида, имеющая в основании прямоугольный треугольник с острым углом $\alpha$. Определить объем и боковую поверхность пирамиды.

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{4}{3}}\left(\sqrt{x+3}-x\right)>0.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0.$$

### Вариант 2

1. В куске сплава массой в 6 *кг* содержится медь. В куске другого сплава массой 8 *кг* содержится меди в процентном отношении вдвое меньше, чем в куске первого сплава. От первого куска отделили некоторую часть, а от второго куска отделили часть, вдвое большую по массе, чем от первого куска. Каждую из отделенных частей сплавили с остатком другого куска, после чего получили два новых сплава с одинаковым процентным содержанием меди. Какова масса каждой из частей, отделенных от кусков первоначальных сплавов?

2. Дана окружность радиуса $R$. Из ее центра проведены два радиуса $OA$ и $OB$, образующие угол $\alpha$. В меньший сегмент круга, отсекаемого хордой $AB$, вписан равносторонний треугольник, одна из сторон которого перпендикулярна к хорде $AB$. Найти сторону этого треугольника.

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(5-x)<1.$$

4. Решить уравнение

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sin x\cos x).$$

### Вариант 3

1. Из пункта $A$ в пункт $B$ одновременно отправляются пешеход и велосипедист. Доехав до $B$, велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через 1 час после начала движения. После встречи пешеход продолжает идти в $B$, а велосипедист поворачивает и тоже едет в $B$. Доехав до $B$, велосипедист снова поворачивает обратно и встречает пешехода через 40 минут после первой встречи. Определить, за какое время пешеход пройдет расстояние от $A$ до $B$.

2. Вычислить объем правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен $\alpha$, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен $r$.

3. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}10\cdot\log_{10}(x^2-3x+2)=-2+\log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}10\cdot\log_{10}(x-3).$$

4. Решить уравнение $\sin^2 x=a^2\sin^2 3x$ $(a>0)$.

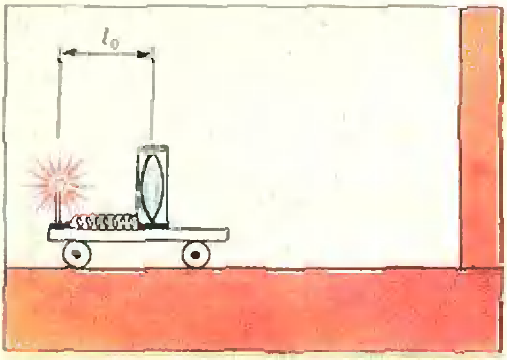



Рис. 1.

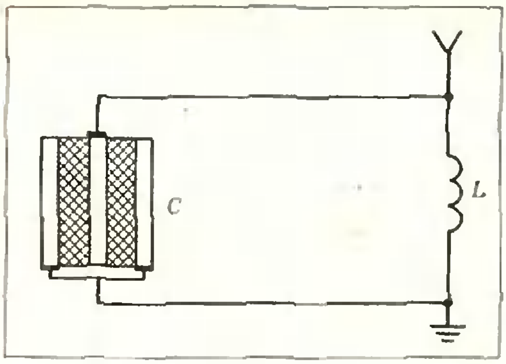



Рис. 3.

**Физика**

1. Рамка площадью $S = 1$ *дм*$^2$ из проволоки с сопротивлением $R = 0{,}45$ *ом* вращается с угловой скоростью $\omega = 100$ *рад/с* в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ *тл*. Ось вращения рамки лежит в ее плоскости и перпендикулярна к вектору магнитной индукции **B**. Найти количество тепла $Q$, которое выделится в рамке за $N = 10^3$ оборотов. Самоиндукцией пренебречь.

2. На тележке смонтированы изотропно излучающий точечный источник света и линза в оправе, прикрепленной к одному концу пружинки жесткостью $k = 2$ *н/м* (рис. 1). Другой конец пружинки прикреплен к тележке под источником света. Оправа с линзой общей массы $m = 200$ *г* может без трения перемещаться вдоль тележки, движущейся перпендикулярно к вертикальной стенке. Определите ускорение **a**, с которым должна двигаться тележка, чтобы пучок света, выходящий из линзы, создавал на экране центральное светлое пятно, освещенность которого не изменялась бы во время движения тележки. Источник света находится на главной оптической оси линзы с фокусным расстоянием $F = 8$ *см*. Длина нерастянутой пружинки $l_0 = 9$ *см*.

3. Небольшой шарик, заряд которого $q = 1$ *мкк*, подвешен на невесомой изолирующей пружинке жесткостью $k = 9$ *н/м*. Из бесконечности медленно приближают другой небольшой шарик с таким же зарядом и помещают его в точку, где первоначально находился шарик на пружинке. Какую работу совершили при этом электростатические силы?

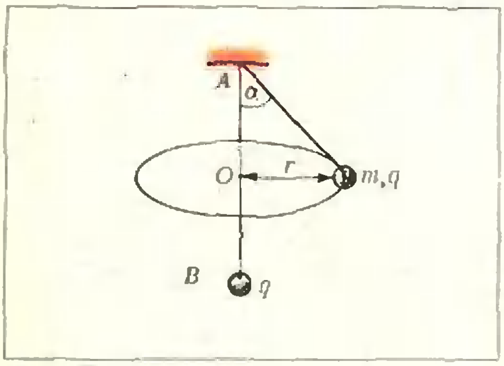



Рис. 2

4. Заряженный шарик массы $m = 10$ *г*, подвешенный на изолирующей нерастяжимой нити, движется с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ *рад/с* по окружности радиуса $r = 5$ *см* (рис. 2). Под точкой подвеса $A$ находится другой, неподвижный заряженный шарик $B$, причем расстояния $AO$ и $BO$ до центра окружности $O$ одинаковы, а угол $\alpha = 45°$. Заряды обоих шариков одинаковы. Найти их величину $q$.

5. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и конденсатора, который представляет собой три металлические пластины площадью $S = 10$ *см*$^2$ каждая, разделенные диэлектриком толщиной $d = 1$ *мм* с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$. Пластины конденсатора подключены к контуру, как показано на рисунке 3. При каком значении индуктивности катушки $L$ контур будет настроен на длину волны $\lambda = 2{,}5$ *км*?

6. В вертикальном цилиндрическом сосуде с гладкими стенками под поршнем с массой $m = 10$ *кг* и сечением $S = 50$ *см*$^2$ находится газ. При движении сосуда по вертикали с ускорением $a = 1$ *м/с*$^2$ высота столба газа под поршнем уменьшается на $\eta = 5\%$ по сравнению с высотой в покоящемся сосуде. Считая температуру газа в сосуде неизменной, определите наружное давление $p_0$. Поршень герметично прилегает к стенкам сосуда.

*А. И. Забоев, Г. И. Пантюхов,*
*В. И. Ростокин, Н. В. Шолохов*

# Спрашивайте — отвечаем

**Редакция «Кванта» получает много писем от своих читателей. В некоторых письмах нам задают вопросы, ответы на которые представляют несомненный интерес не только для автора письма, но и для других читателей. Такие вопросы и ответы на них мы будем помещать на страницах журнала под рубрикой «Спрашивайте — отвечаем».**

**Возможно, некоторые из вас не решаются писать в редакцию из боязни задать «глупый» вопрос, допустить в письме ошибки или неточности. Конечно, лучше их не допускать, но ведь анализ иных ошибок может оказаться и плодотворным, и интересным, и поучительным. В науке нередко анализ ошибок приводит даже к открытиям.**

**В этом номере мы помещаем ответ на вопрос нашего читателя А. Сиднева.**

**Вот что пишет А. Сиднев:**

*Уважаемая редакция*

*В журнале «Квант» № 2 за 1974 г. помещена статья «Необычное путешествие», в которой излагается идея так называемого «гравилета», предложенная В. В. Белецким и М. Е. Гиверцем.*

*Не противоречит ли эта идея закону сохранения энергии? Ведь если «гравилет» будет выведен на геоцентрическую орбиту с первой космической скоростью $v_1 = 8000$ м/с, а уйдет в мировое пространство со второй космической скоростью $v_2 = 11\,000$ м/с, то при массе $m = 1000$ кг за период пребывания на орбите он должен приобрести энергию*

$$E = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \approx 285 \cdot 10^8 \text{ дж}.$$

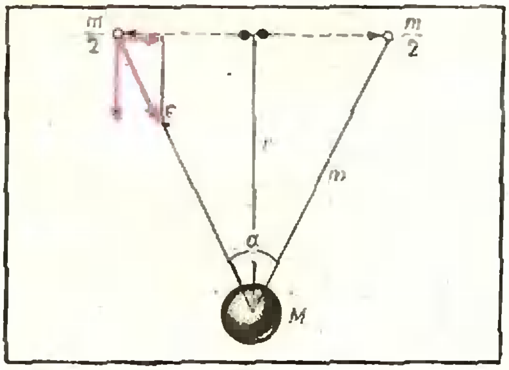
*Откуда «гравилет» возьмет эту энергию?*

Напомним, что в статье «Необычное путешествие» рассказывалось о космическом корабле в виде гантели, шары которой можно сдвигать или раздвигать. В статье было показано, что такой корабль, движущийся вокруг Земли, можно разогнать до второй космической скорости, если каждый раз в точках перигея быстро разводить шары, а в точках апогея — сдвигать их.

Ниже мы публикуем ответ автора статьи «Необычное путешествие» И. И. Воробьева.

Противоречие с законом сохранения энергии действительно было бы, если бы раздвижение массивных частей корабля не требовало затрат энергии. Рассмотрим разведение шаров в перигее. Будем считать разведение быстрым (так что перемещением по орбите можно пренебречь) и происходящим перпендикулярно плоскости орбиты.

Пусть $r$ — расстояние от Земли до центра масс корабля (см. рис.). При разведении на угол $\alpha$ расстояние от каждого из шаров до центра Земли станет $r' = \frac{r}{\cos(\alpha/2)}$. Работа против сил гравитации (минимально необходимая работа для разведения шаров) равна




Напомним, что при движении по орбите угол $\alpha$ удерживается постоянным. Поэтому сила, действующая на гантель (гравилет с раздвинутыми шарами), отличается от силы, действующей на материальную точку той же массы (гравилет со сдвинутыми шарами), постоянным множителем $\cos\frac{\alpha}{2}$.

$$A = -\gamma\frac{mM}{r'} - \left(-\gamma\frac{mM}{r}\right) = \gamma\frac{mM}{r}\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

То, что надо совершать работу, ясно, потому что имеется составляющая силы притяжения, направленная против перемещения частей гравилета. Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии корабля в гравитационном поле Земли. Таким образом, увеличение потенциальной энергии корабля происходит за счет затрат энергии внутренних источников на разведение шаров.

При сдвиге в апогее, наоборот, работа совершается гравитационными силами (можно даже запасти энергию в источниках). Но так как расстояние до корабля в апогее больше, то эта работа меньше «перигейной». Так что в целом за цикл приходится затрачивать энергию, которая и идет в конечном счете на разгон корабля.

Наименьшее необходимое количество энергии для ухода с орбиты одинаково при любом способе разгона. Однако, может оказаться, что гравилет в энергетическом отношении более эффективен, чем, например, ракетный двигатель. Ведь очевидно, что при реактивном движении часть энергии тратится впустую — переходит в кинетическую энергию выброшенных газов.

ИНФОРМАЦИЯ

# Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в ВЗМШ не принимаются.

Занятия начнутся с 1-го сентября. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно (примерно раз в месяц) получать задания, которые содержат объяснения теоретических вопросов и задачи для решения.

Во Всесоюзной заочной математической школе три курса обучения.

Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения задач не позднее 20 марта 1975 года. После проверки работы (примерно в июле 1975 года) будет сообщено, приняты ли вы в ВЗМШ. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач по внешнему виду отличаются от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике.

Для того, чтобы быть принятым в школу, не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких объяснений может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются.

В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером $14\times6$ *см* с вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать вам ответ).

На обложку тетради наклейте лист клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет):

| | |
|---|---|
| Область | *Вологодская* |
| Фамилия, имя | *Иванов Петр* |
| Год рождения | *1961 г.* |
| Класс | *7-й класс* |
| Школа (полное название) | *школа № 2 г. Тотьмы* |
| Фамилия, имя, отчество учителя математики | *Никаноров Владимир Алексеевич* |
| Место работы и должность родителей | *Отец — шофер автобазы № 3*<br>*Мать — домашняя хозяйка* |
| Полный почтовый адрес | *г. Тотьма, ул. Ленина, д. 3, кв. 23* |

**Результаты проверки**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12а | 12б |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | |

Школьники, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, должны присылать работы по адресу: *Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61. Специнтернат при ЛГУ. Заочная математическая школа. На конкурс.*

Учащиеся, проживающие в Воронежской, Белгородской, Тамбовской, Курской и Липецкой областях, должны высылать работы по адресу: *г. Воронеж, Университет, ФЗМШ. На конкурс.*

Школьники, проживающие в остальных областях РСФСР и других союзных республиках, должны присылать работы по адресу: *117234, Москва, В-234, МГУ, мех.-мат., ВЗМШ. На конкурс.*

# Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1975 году

1. Можно ли расположить на плоскости шесть точек и соединить их отрезками так, чтобы каждая точка была соединена отрезками с четырьмя другими точками и отрезки не пересекались друг с другом?

2. После окончания спектакля «Ревизор» Бобчинский и Добчинский начали препираться на сцене по поводу того, кто первый сказал «Э!».

Бобчинский: Это Вы, Петр Иванович, первый сказали «Э!». Вы сами раньше так говорили.

Добчинский: Нет, Петр Иванович, я так не говорил. Это Вы семгу первый заказали. Вы и сказали «Э!». А у меня зуб во рту со свистом.

Бобчинский: Что я семгу первый заказал, это верно. И верно, что у Вас зуб со свистом. Но все-таки это Вы первый сказали «Э!».

Выясните, кто первый сказал «Э!», если известно, что из девяти произнесенных в этом разговоре фраз нечетное число верных.

3. Найдите четыре числа, если известно, что произведение любых трех из них на 120 больше оставшегося числа.

4. Докажите, что если в треугольнике совпадают какие-нибудь две точки из следующих трех:

1) центр вписанного круга,
2) центр описанного круга,
3) точка пересечения медиан,

то треугольник равносторонний.

5. Четыре девочки — Катя, Лена, Маша и Нина — участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен — больше, чем все остальные, а Лена 5 песен — меньше, чем все остальные. Сколько песен было спето?

6. Верно ли, что при любом натуральном $n$ число $n^4 + (n+1)^4$ простое?

7. Найдите величину угла $B$ треугольника $ABC$, если длина высоты $CH$ вдвое меньше длины стороны $AB$, а величина угла $A$ равна $75^\circ$.

8. Допишите к числам 10, 12, 15 еще семь целых чисел так, чтобы наибольший общий делитель любых двух из десяти написанных чисел встречался среди этих чисел и наименьшее общее кратное любых двух написанных чисел тоже встречалось среди этих чисел.

9. Докажите, что если $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$, то какие-то два из трех чисел $a$, $b$, $c$ равны друг другу.

10. Найдите все значения $p$ и $q$, при которых многочлен

$$x^4+px^3+17x^2+qx+16$$

может быть представлен в виде квадрата некоторого квадратного трехчлена от $x$.

11. Элементами множеств $A$, $B$ и $C$ служат числа 1, 2, ..., 9. Известно следующее:

$$A\cap B=\{1, 2\},$$
$$B\cap C=\{3, 7\},$$
$$A\cup B=\{1, 2, 3, 6, 7, 8\},$$
$$A\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}.$$

Найдите множества $A$, $B$ и $C$. (Здесь $A\cap B$ — пересечение множеств $A$ и $B$, $A\cup B$ — объединение этих множеств.)

12. Про некоторую фигуру на плоскости известно, что при повороте вокруг точки $O$ на угол $48^\circ$ она переходит в себя. Можно ли утверждать, что она перейдет в себя при повороте вокруг точки $O$ на угол

а) $90^\circ$?
б) $72^\circ$?

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

# Всесоюзный конкурс общества «Знание»

## на лучшие произведения научно-популярной литературы

Всесоюзное общество «Знание» ежегодно проводит открытый конкурс на лучшие научно-популярные книги и брошюры по всем областям современной науки и техники. В конкурсе участвуют центральные и республиканские издательства, выпускающие научно-популярную литературу: «Молодая гвардия» и «Детская литература», «Просвещение» и «Радяньска школа», «Атомиздат», «Наука», «Наукова думка», «Беларусь» и десятки других издательств. Цель конкурса — активизировать работу издательств по созданию научно-популярной литературы для широких кругов читателей, а также для специалистов, интересующихся развитием смежных отраслей науки, повысить качество выпускаемой литературы.

В 1974 году на конкурс было представлено около 400 книг и брошюр, выпущенных в свет в 1973 году. Жюри конкурса под председательством академика А. Л. Яншина отметило лучшие из них премиями и поощрительными дипломами. Среди награжденных имеется несколько книг и брошюр, посвященных различным проблемам математики, физики и астрономии. О них-то мы и хотим кратко рассказать нашим читателям.

Диплом первой степени получили два ежегодника, регулярно выпускаемые издательством «Знание» — «Наука и человечество» и «Будущее науки». Первый ежегодник популярно рассказывает о крупнейших достижениях современной науки. В 1973 году в нем были помещены статьи академика А. Н. Скринского «Физика элементарных частиц и встречные пучки», академика С. Н. Журкова «Физические основы прочности», лауреата Нобелевской премии французского физика А. Кастлера «Нерезонансные взаимодействия между атомами и электромагнитным излучением», члена-корреспондента АН СССР Ю. Н. Денисюка «Голография», доктора физико-математических наук М. Я. Марова «Современные представления о Венере» и ряд других. О втором ежегоднике подробно рассказано в этом же номере нашего журнала (см. с. 71). Такой же диплом присужден коллективу авторов под руководством академика И. В. Петрянова-Соколова, подготовившему третий том Детской энциклопедии. В этом томе рассказывается о веществе и энергии.

Диплом первой степени и денежную премию за прекрасную научно-популярную книгу «Вселенная, жизнь, разум», выпущенную издательством «Наука» третьим изданием в 1973 году, получил известный советский астрофизик член-корреспондент АН СССР И. С. Шкловский. Рассказ об этой книге помещен в десятом номере нашего журнала за 1973 год *).

Дипломами второй степени и денежными премиями награждены профессор Я. Е. Гегузин за книгу «Капля», о которой мы рассказывали в девятом номере «Кванта» за 1974 год, и член редакционной коллегии нашего журнала доктор физико-математических наук Ю. Н. Ефремов за книгу «В глубины Вселенной». Рассказ о ней вы найдете в двенадцатом номере «Кванта» за 1974 год **).

Такой же диплом получила весьма оригинальная книга известного популяризатора науки профессора А. И. Китайгородского «Реникса», вышедшая вторым изданием в издательстве «Молодая гвардия». В ней автор разоблачает антинаучные сенсации, проникшие на страницы газет и журналов в последние годы.

Название книги заимствовано у А. П. Чехова. В пьесе «Три сестры» учитель гимназии Кулыгин рассказывает о таком случае: «В какой-то семинарии учитель написал на сочинении «чепуха», а ученик прочел «реникса» — думал, что по-латыни написано..»

Поощрительные дипломы получили книги «Извечные тайны неба» А. А. Гурштейна (выпущена в свет издательством «Просвещение») и «Загадки микромира» В. А. Черни-

*) См. статью И. Е. Евгеньева «Книга о Вселенной», «Квант», 1973, № 10.

**) См. статью Е. П. Левитана «Приглашение в дальний космический рейс», «Квант», 1974, № 12.

ковой (выпущена в свет издательством «Молодая гвардия»).

Среди научно-популярных брошюр диплома первой степени и денежной премии удостоена брошюра академика АН УССР Б. В. Гнеденко «Беседы о теории массового обслуживания». Она содержит восемь небольших бесед о различных проблемах этой сравнительно молодой области прикладной математики. Телефонная связь, обслуживание механизмов, работа морских и речных портов, скорая медицинская помощь — вот некоторые примеры областей применения этой теории. Она требует существенного изменения традиционных методов работы многих сфер обслуживания, открывая огромные возможности совершенствования их деятельности.

Такая же награда присуждена еще одному члену редакционной коллегии нашего журнала профессору Я. А. Смородинскому за научно-популярную брошюру «Частицы, кванты, волны». Это — популярный рассказ о квантовой механике, как говорит сам автор в обращении к читателю, своеобразная прогулка по главным проспектам огромного города, в который превратилась эта наука.

Несмотря на то, что квантовая механика скоро будет отмечать свое 75-летие, она все еще сохраняет репутацию весьма сложной науки, далеко отстоящей от той физики, о которой написано в школьных учебниках. Дело в том, что законы, управляющие явлениями в микромире, совершенно отличны от законов, с которыми мы имеем дело в обычном мире. О законах микромира и рассказывается в этой брошюре. Ну а читать ее могут все, кто, по словам автора, хотя бы в общих чертах знаком со школьным курсом физики.

Диплом второй степени и денежная премия присуждены авторам брошюры «Чарльз Бэббедж» Р. С. Гутеру и Ю. Л. Полунову. Они написали биографию создателя одной из первых действующих вычислительных машин, выдающегося английского математика и изобретателя XIX века Чарльза Бэббеджа. Причем написали ее весьма доступно, живо и увлекательно, с большой любовью к своему герою.

Все упомянутые здесь брошюры вышли в издательстве «Знание».

Поощрительные дипломы присуждены председателю Комитета по атомной энергии А. М. Петросьянцу и вице-президенту АН СССР А. А. Логунову за брошюру «Физика высоких энергий и ускорители заряженных частиц» (издательство «Знание»), Л. М. Письмену за брошюру «От чуда к числу» (издательство «Педагогика») и ряду других авторов научно-популярных брошюр.

*В. А. Лешковцев*

# Будущее науки

В начале 1966 года на прилавках книжных магазинов появилась и вскоре была раскуплена небольшая книжечка с привлекательным названием «Будущее науки». На титульном листе подзаголовок: «Перспективы. Гипотезы. Нерешенные проблемы». А в предисловии было написано следующее:

«Трудно найти сейчас человека, которого не интересовало бы, что даст людям наука через пять, десять, а то и через сто лет. Роль науки в нашей жизни возрастает так стремительно, что ее будущее становится неотделимым от будущего самого человеческого общества.

Ежегодник «Будущее науки» — первое в нашей стране популярное издание, целиком посвященное перспективам развития и нерешенным проблемам науки. На его страницах выступают ведущие советские и зарубежные ученые, которые делятся своими мыслями о путях познания и технического прогресса, рассказывают о новых гипотезах, о грядущих победах разума.

Участие наиболее авторитетных специалистов служит гарантией максимальной обоснованности высказываемых прогнозов и предположений.

Ежегодник рассчитан на самые широкие круги читателей, интересующихся современным состоянием и перспективами развития науки».

Первый выпуск ежегодника открывался статьей академика И. Е. Тамма, в которой популярно рассказывалось о современном состоянии и перспективах развития физики элементарных частиц. Статья называлась «На пороге новой теории». Далее шли статьи академика Е. К. Завойского «Пути изучения плазмы», английского физика Д. Д. Кокрофта «К лучшему пониманию сил природы», академика Г. Н. Флерова «Будущее синтеза и изучения трансурановых элементов», профессора Л. Д. Розенберга «Новое научное направление — квантовая акустика». Президент Академии наук Армянской ССР академик В. А. Амбарцумян написал статью об основных проблемах космогонии — науки о происхождении и развитии небесных тел, а вице-президент Академии наук Украинской ССР академик В. М. Глушков — статью о роли электронно-вычислительных устройств в автоматизации умственного труда. Были в этом сборнике также статьи, посвященные нерешенным проблемам биологии, географии, геологии и ряда других наук.

С тех пор вышло в свет уже семь выпусков этого международного ежегодника. И в каждом из них по несколько интереснейших статей о перспективах развития различных областей физики, астрономии, кибернетики.

Ни один из любителей физики не откажет себе в удовольствии познакомиться со статьями на такие темы, как: «Может ли кончиться физическая наука?» (автор — профессор А. С. Компанеец, вып. 2), «Макромикросимметрическая Вселенная» (академик М. А. Марков, вып. 6), «Физика XX века» (В. Вайскопф (США), вып. 4), «Рождение элементарных частиц» (академик Я. Б. Зельдович, вып. 5), «Пути термоядерных исследований» (академик Л. А. Арцимович, вып 6).

Каждому любителю астрономии захочется поскорее прочитать статьи «Полеты к астероидам» (Х. Альвен (Швеция), вып. 6), «Настоящее и будущее астрометрии (член-корреспондент АН СССР М. С. Зверев, вып. 6), «Энергетические проблемы астрофизики» (член-корреспондент АН СССР В. В. Соболев, вып. 6), «Проблема дозвездной материи» (доктор физико-математических наук Л. В. Мирзоян, вып. 4), «Пульсары» (член-корреспондент АН СССР И. С. Шкловский, вып. 4), «Квазары» (В. Зонн (Польша), вып. 5).

В опубликованных выпусках рассказано о будущих ускорителях заряженных частиц (статьи академиков А. Л. Минца, М. А. Маркова и Дж. Гамильтона (США)), о нерешенных проблемах физики элементарных частиц (статьи Дж. Чу (США), А. Салама (Пакистан)), о перспективах развития квантовой электроники (статьи академиков Н. Г. Басова, А. М. Прохорова, академика АН БССР Б. И. Степанова), о проблемах физики твердого тела (статья академика И. М. Лифшица). Проблемы общения человека и ЭВМ рассмотрены в статье члена-корреспондента АН СССР Н. П. Бусленко.

Только математике в этих ежегодниках пока что не очень повезло. Она представлена всего лишь двумя статьями — статьей академика АН УССР Б. В. Гнеденко «О будущем прикладной математики» и статьей академика АН БССР Н. П. Еругина «Математика — барометр цивилизации».

В последнем (седьмом) номере ежегодника*) помещены статьи академика Г. Н. Флерова и доктора физико-математических наук В. С. Барашенкова «Практические аспекты физики тяжелых ионов», члена-корреспондента АН СССР Л. Д. Бахраха и кандидата физико-математических наук Г. А. Гаврилова «Голография в науке и технике будущего», члена корреспондента АН СССР В. С. Троицкого «Поиски внеземных цивилизаций», члена-корреспондента АН СССР В. А. Крата «Телескопы в стратосфере» и другие интересные статьи.

Редакционная коллегия ежегодника строго придерживается принципов, провозглашенных в предисловии к первому выпуску. Тематика статей актуальна, а авторами их являются широко известные советские и иностранные ученые, которые внесли большой вклад в развитие рассматриваемых областей науки.

Молодежь активно интересуется нерешенными проблемами науки. И это естественно. Ведь именно тем, кто сегодня еще сидит за школьной партой, придется в будущем решать многие из этих проблем. Но из школьных учебников об этих проблемах можно узнать лишь немногое. Приходится обращаться к научно-популярной и научно-фантастической литературе. К сожалению, нередко в этих книгах, брошюрах, статьях встречаются «проблемы» и «гипотезы», которые ничего общего с наукой не имеют. Ежегодники «Будущее науки» избавлены от этого недостатка. Все, о чем они рассказывают, имеет строгую научную основу, волнует и занимает внимание современных ученых.

Сборники «Будущее науки» написаны популярно. Большинство помещенных в них статей доступны для учащихся старших классов. И мы охотно рекомендуем их нашим юным читателям.

*В. А. Рудов*

---

*) «Будущее науки», Международный ежегодник, вып. 7, М., «Знание», 1974, 400 с., 71 коп.

## «Квант» для младших школьников

### Задачи

1. Старый пират, умирая, завещал наследнику найти зарытый на острове клад по трем ориентирам — часовне, дубу и вязу — следующим образом: сначала пройти от часовни до дуба и от него направо под прямым углом на такое же расстояние, воткнуть на этом месте палку; затем пройти от часовни до вяза и от него налево под прямым углом на такое же расстояние, воткнуть в этом месте еще одну палку, в середине отрезка, соединяющего палки, зарыт клад.

Приплыв на остров, наследник увидел, что дуб и вяз на месте, а от часовни не осталось и следа. Помогите ему отыскать клад.

2. Когда $\overline{\text{заказ}}$ умножили на 99 999, получили число, три последние цифры которого были 705. Какое число обозначено словом «заказ»? (Одинаковые буквы заменяют одинаковые цифры.)

3. 100 фишек стоят в ряд. Любые две фишки, стоящие через одну, можно менять местами. Удастся ли расположить фишки в обратном порядке?

4. Барон Мюнхгаузен рассказывает про следующий «правдивый случай», произошедший с ним.

Он разбежался, чтобы прыгнуть через болото. Во время прыжка он заметил, что не допрыгнет до противоположного берега. Тогда, прямо в воздухе, он повернул обратно и возвратился на берег, с которого прыгал. Почему это невозможно?

5. Хулиган Вася отпилил от шахматной доски два противоположных угловых квадрата размером $3 \times 3$ клетки. Можно ли остаток обойти конем и вернуться на исходное поле?

Рисунки Э. Назарова

В. А. Тихомирова

# Электризация через влияние

Могут ли два одноименно заряженных тела притягиваться друг к другу?

Можно ли с помощью одного заряженного тела зарядить другое тело так, чтобы его заряд был больше заряда первого тела?

Чтобы ответить на эти вопросы, давайте разберемся в одном интересном физическом явлении — явлении электростатической индукции, или, другими словами, электризации тел через влияние.

Рассмотрим такой опыт. К шарику $A$, заряженному положительным зарядом $q_A$, подносится незаряженный металлический шар $B$ (рис. 1). При этом на поверхности шара $B$ появляются заряды: на ближней к шарику $A$ стороне отрицательные, а на дальней — положительные. В этом можно наглядно убедиться, если шариком электроскопа касаться соответствующих участков поверхности шара $B$. Объяснить такое распределение зарядов нетрудно. Дело в том, что свободные электроны, которые раньше были равномерно распределены по всему шару $B$, под влиянием зарядов шарика $A$ приходят в движение и перераспределяются по шару так, что слева их оказывается больше, чем справа. Таким образом, в левой части шара индуцируется, то есть наводится, отрицательный заряд $-q_B$, а в правой части — положительный заряд $+q_B$. В этом и заключается явление электростатической индукции. Заметим кстати, что в нашем случае величина наведенного заряда $q_B$, конечно, меньше величины наводящего заряда $q_A$, поскольку влияние наводящего заряда распространяется и на другие окружающие его тела, где

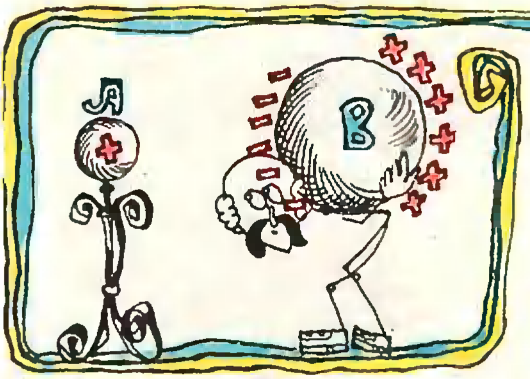



Рис. 1.

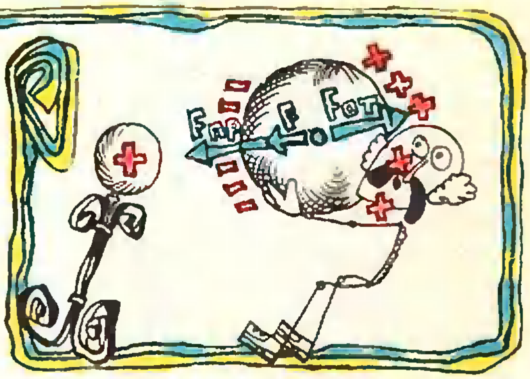


Рис. 2.

тоже индуцируются электрические заряды.

Между заряженными телами всегда действует электрическая сила. Так будет и с шарами $A$ и $B$. Точнее сказать, в этом случае возникают две силы — сила притяжения $F_{пр}$ между шариком $A$ и левой частью шара $B$ и сила отталкивания $F_{от}$ между шариком $A$ и правой частью шара $B$ (рис. 2). Поскольку отрицательно заряженная часть находится ближе к шарику $A$, сила $F_{пр}$ больше силы $F_{от}$, и в результате шары будут притягиваться друг к другу под действием результирующей силы $F = F_{пр} - F_{от}$.

Что изменится, если шар $B$ предварительно зарядить некоторым зарядом $q'_B$, причем тоже положительным? Конечно, все прежние рассуждения о наведении зарядов остаются в силе, но теперь надо учесть еще взаимодействие зарядов $q_A$ и $q'_B$. Появляется еще одна сила $F'_{от}$ — сила отталкивания зарядов $q_A$ и $q'_B$. Окончательный результат будет зависеть от соотношения между величинами сил $F$ и $F'_{от}$, вернее, от соотношения между величинами зарядов $q_B$ и $q'_B$, так как чем больше величина заряда, тем больше сила электрического взаимодействия.

Если величина наведенного заряда $q_B$ окажется больше величины имеющегося на шаре заряда $q'_B$, то в итоге одноименно заряженные шары все-таки будут притягиваться. Когда же это возможно? Мы уже говорили о том, что величина наведенного заряда на проводнике меньше величины влияющего заряда. Поэтому только если заряд $q_A$ намного больше заряда $q'_B$, может оказаться, что величина заряда $q_B$ будет больше заряда $q'_B$.

Итак, два одноименно заряженных тела могут притягиваться друг к другу, но для этого заряд одного из них должен быть намного больше, чем заряд другого.

Мы показали, что под влиянием заряженного тела на проводнике можно навести электрические заряды, но при этом проводник в целом остается электрически нейтральным (рис. 3). А нельзя ли его зарядить по-настоящему, так чтобы суммарный заряд не был равен нулю? Оказывается можно, и даже совсем просто. Для этого достаточно проводник в присутствии заряженного тела заземлить на некоторое время, а затем убрать и заземление, и заряженное тело (рис. 4). При этом знак заряда проводника будет противоположен знаку заряда тела. Действительно, при заземлении свободные электроны под влиянием положительного заряда на теле приходят из земли и остаются на проводнике, заряжая его в целом отрицательно.

Величину наведенного заряда можно существенно увеличить, практически приблизив ее к величине наводящего заряда, если заряженное тело поместить внутрь длинного ме-

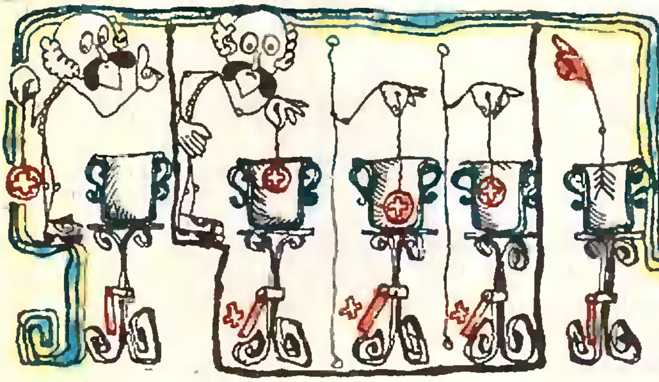


Рис. 3.

Рис. 4.

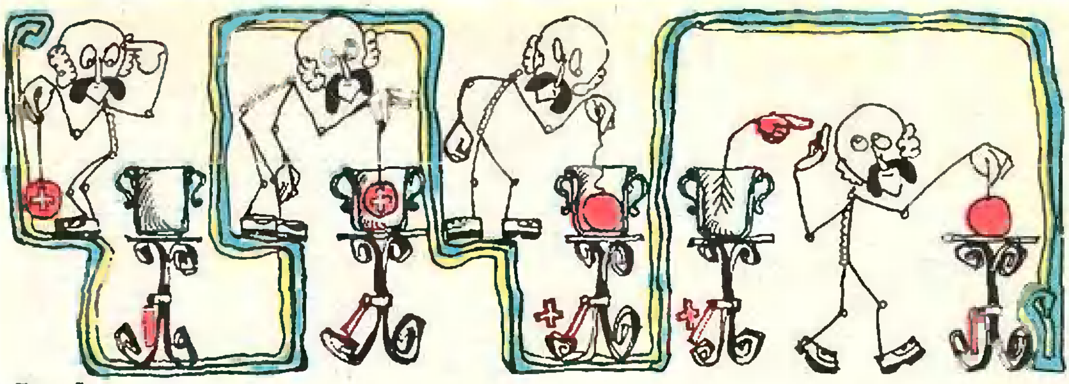


Рис. 5.

таллического цилиндра (или шара) с небольшим отверстием. В этом случае влияние заряженного тела на другие тела почти исключено, поэтому на внутренней поверхности цилиндра (или шара) наведется заряд, по величине практически равный заряду шарика, но противоположный по знаку, а на наружной поверхности — такой же и по величине, и по знаку. Если заряженным телом коснуться внутренней стенки цилиндра, противоположные по знаку заряды нейтрализуются, и на цилиндре останутся заряды того же знака, что были на заряженном теле (рис. 5). Таким образом, можно практически целиком передавать заряд с одного тела на другое.

Теперь попробуем ответить и на второй вопрос, поставленный в самом начале. Пусть у нас имеются: заряженный шарик *A*, незаряженный шарик *B*, полый металлический шар и электроскоп, на котором мы хотим накопить заряд бóльший, чем заряд шарика *A*.

Прежде всего зарядим по индукции шарик *B* (естественно, зарядом противоположного знака). Внесем на некоторое время шарик *B* внутрь заземленного шара, а затем уберем и заземление, и шарик *B*. На шаре останется заряд, равный по величине заряду шарика *B*, но противоположный ему по знаку, то есть совпадающий со знаком заряда шарика *A*. Теперь передадим этот заряд электроскопу. Если проделать такую операцию многократно, то на электроскопе, действительно, можно будет получить заряд того же знака, что и исходный, но значительно больший по величине.

В заключение попробуйте ответить на два вопроса.

1. Незаряженный проводящий шарик *C* с помощью длинного гибкого проводника присоединили к левой части шара *B* (см. рис. 2). В результате на шарике появились положительные заряды. Почему?

2. На электроскопе имеется небольшой положительный заряд. Если к шарику электроскопа приближать сильно наэлектризованную палочку, несущую большой отрицательный заряд, то листочки электроскопа будут сначала опадать, а потом опять расходиться. Как это можно объяснить?

*Рисунки И. Чернуского*

**ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**

**К статье «Отношения отрезков, площадей и объемов»**

1. 11/12. Указание. Провести диагональ $AC$.

2. $\dfrac{(a+c)(b+c)(a+b+c)}{ab(a+b+2c)}$.

3. $\angle C=45^\circ$. Указание. Опустить высоту $BD$, тогда $CM=MD=\frac{1}{4}AC$, $AD=BD=\frac{1}{2}AC=CD$.

4. $\dfrac{3a-b}{2(a+b)}\,ab\sin 2\alpha$.

5. 8:37. Указание. Рассмотрев $\triangle SBC$, находим, что $SM:MC=2:3$.

6. 7:29. Указание. Заданная плоскость пересекает грань $ABC$ по прямой $PK$ ($K$ на $AB$), параллельной $MN$. Отсюда легко найти, что $BK=\frac{1}{4}AB$; далее воспользоваться формулой объема усеченной пирамиды.

8. 1, $\sqrt{2}/3$, $1/\sqrt{2}$. Указание. Точка $S$ лежит внутри сферы и $SA\cdot SD=SB\cdot SE=SC\cdot SF=1$, по условию задачи находятся три соотношения для $\frac{SA}{SD}$, $\frac{SB}{SE}$ и $\frac{SC}{SF}$, из которых находятся и длины всех отрезков.

9. $(\alpha\gamma\rho+\delta\sigma\beta):\alpha\sigma$; $\sigma\beta:\rho$.

**К статье «Задачи о воздушных шарах»**

1. 13,5 $mg$.
2. Не менее чем на 5°.
3. $\dfrac{1-ah_1}{1-ah_2}=\dfrac{29}{25}\left(1-\dfrac{4}{29}\dfrac{T_0}{T_1}\right)$.

**К статье «Московский инженерно-физический институт»**

**Математика**

Вариант I

1. Пусть $v$ — скорость течения реки, $x$ — собственная скорость моторной лодки, тогда скорость плота совпадает со скоростью течения реки $v$. Скорость моторной лодки вверх по течению реки равна $x-v$, вниз по течению реки — $x+v$. Обозначим расстояние между пунктами $A$ и $B$ через $S$. Из условий задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases}(x-v)a+v\cdot a=S,\\ \dfrac{S}{x-v}+\dfrac{S}{x+v}=\dfrac{S}{v}.\end{cases}$$

Искомое время равно $\frac{S}{v}$. Первое уравнение системы преобразуется к виду $ax=S$, а второе уравнение системы может быть сведено к квадратному уравнению относительно отношения $\frac{x}{v}$:

$$\left(\frac{x}{v}\right)^2-2\left(\frac{x}{v}\right)-1=0,$$

откуда

$$\left(\frac{x}{v}\right)_1=1+\sqrt{2},\quad \left(\frac{x}{v}\right)_2=1-\sqrt{2}.$$

По условию задачи $x>v>0$, поэтому второе решение не удовлетворяет условиям задачи. Теперь

$$\frac{S}{v}=\frac{ax}{v}=a(1+\sqrt{2}).$$

2. Легко найти площадь основания пирамиды $S=\frac{1}{2}r^2\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2\operatorname{tg}\alpha$. Вписанный в пирамиду конус касается пирамиды по трем образующим, каждая из которых перпендикулярна к соответствующим сторонам прямоугольного треугольника и наклонена к плоскости основания под углом $\varphi$. Отсюда следует, что все грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом. Но в этом случае

$$S_{\text{бок. пов.}}=\frac{S}{\cos\varphi}=\frac{r^2}{2\cos\varphi}\cdot\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Легко найти высоту пирамиды: $H=r\operatorname{tg}\varphi$. Теперь $V=\frac{1}{3}HS=\frac{1}{6}r^3\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

3. Исходное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}-x>1, & (1)\\ x+3\geqslant 0. & (2)\end{cases}$$

Неравенство (1) представим в виде

$$\sqrt{x+3}>x+1. \qquad (3)$$

Если $-3 \leqslant x < -1$, то неравенство (3) выполняется (правая часть неравенства отрицательна). При $x \geqslant -1$ обе части неравенства (3) положительны, возводя их в квадрат, получим

$$x^2 + x - 2 < 0.$$

С учетом ограничений ($x \geqslant -1$) последнее неравенство имеет решение $-1 \leqslant x < 1$. Окончательно получаем $-3 \leqslant x < 1$.

4. Данное уравнение равносильно следующему:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin 2x + a = 0$$

или

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(a+1) = 0.$$

Решая это уравнение относительно $\sin 2x$, получим

$$\sin 2x = 1 - \sqrt{3+2a}, \qquad (1)$$

$$\sin 2x = 1 + \sqrt{3+2a}. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) могут иметь действительные корни лишь при $a \geqslant -\frac{3}{2}$. Очевидно, что уравнение (2) имеет решение лишь при $a = -\frac{3}{2}$ и это решение совпадает с решением уравнения (1) при этом же значении параметра. Из условия $|\sin 2x| \leqslant 1$ для уравнения (1) получим систему неравенств относительно параметра $a$:

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{3+2a} \geqslant -1, \\ 1 - \sqrt{3+2a} \leqslant 1, \end{cases}$$

которая совместна при $-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$.

Окончательно получим ответ:

$$x = \frac{1}{2} k\pi + \frac{1}{2}(-1)^k \times \arcsin\left(1 - \sqrt{2a+3}\right),$$

где $k$ — целое, $-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$; при других $a$ решений нет.

### Вариант 2

1. 2,4 кг; 4,8 кг.

2. $R\left[\sqrt{1 - \frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \cos\frac{\alpha}{2}\right]$ при $\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \pi$;

$R\left[\sqrt{1 - \frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \cos\frac{\alpha}{2}\right]$ при $\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{5\pi}{3}$.

3. $2 < x < 5$.

4. $x_1 = 2n\pi$, $x_2 = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, $n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

### Вариант 3

1. 3 часа.

2. $\frac{2}{3} r^3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{1 + 2\cos\alpha}$.

3. $x = 5$.

4. $x = k\pi$ при $0 < a \leqslant \frac{1}{3}$;

$x_1 = k\pi$,

$x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-a}{2a} + n\pi$ при $\frac{1}{3} < a < 1$;

$x_1 = k\pi$,

$x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-a}{2a} + n\pi$,

$x_3 = \pm\frac{1}{2}\arccos\left[-\frac{1+a}{2a}\right] + m\pi$ при $1 \leqslant a$ ($k$, $n$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

**Физика**

1. *При вращении рамки с постоянной* угловой скоростью в однородном магнитном поле в ней возникает переменный ток, изменяющийся со временем по гармоническому закону. В этом случае действующее значение э. д. с. индукции $E$ связано с ее амплитудным значением $E_0 = BS\omega$ известным соотношением

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = \frac{BS\omega}{\sqrt{2}}.$$

За время $t = NT$, где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — период переменного тока, в рамке выделится количество теплоты, равное

$$Q = \frac{E^2}{R} t = \pi\omega N (BS)^2 / R = 0{,}7 \text{ дж}.$$

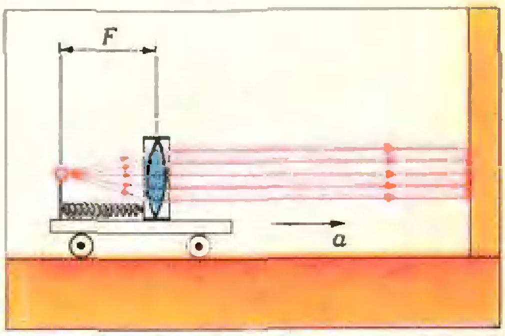



Рис. 1.

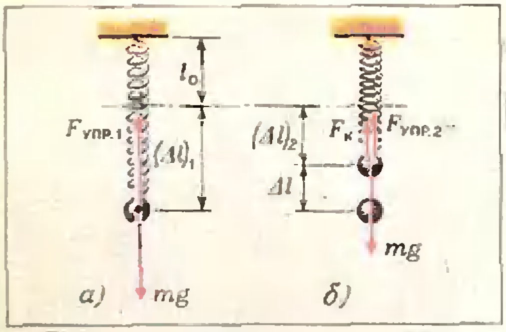



Рис. 2.

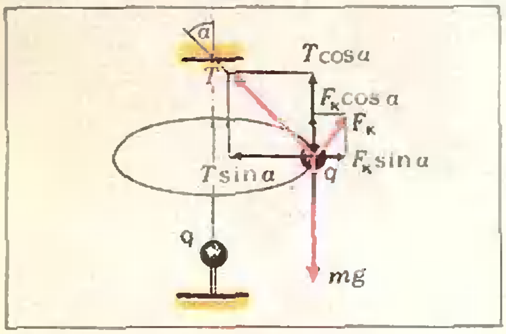



Рис. 3.

2. Чтобы освещенность центрального светлого пятна на стенке оставалась неизменной, необходимо, чтобы точечный источник света находился в фокусе собирающей линзы, то есть длина пружинки при движении тележки должна быть равна $F$ (рис. 1). Поскольку $F < l_0$, пружинка будет сжата, и сила упругости $F_{упр} = k(l_0 - F)$, действующая на оправу со стороны сжатой пружинки, будет направлена вправо. Следовательно, ускорение оправы, а значит, и тележки, направлено к стенке, а величина его определяется из уравнения движения оправы

$$ma = k(l_0 - F).$$

Отсюда

$$a = \frac{k(l_0 - F)}{m} = 0{,}1\ м/с^2.$$

3. Работа $A$ электростатических сил равна убыли потенциальной энергии взаимодействия электрических зарядов:

$$A = -(W_2 - W_1) = -\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \Delta l} - 0\right) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \Delta l},$$

где $\Delta l$ — перемещение шарика на пружинке, равное изменению длины деформированной пружинки (рис. 2).

Для определения $\Delta l$ запишем условия равновесия шарика на пружинке в начальный и конечный моменты (см. рис. 2, *а* и *б*):

$$k(\Delta l)_1 = mg,$$

$$k(\Delta l)_2 + F_к = mg$$

$\left(F_к = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (\Delta l)^2}\right.$ — кулоновская сила отталкивания электрических зарядов$\Big)$. Отсюда

$$\Delta l = (\Delta l)_1 - (\Delta l)_2 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 k}}.$$

Подставив полученное значение $\Delta l$ в выражение для работы $A$, получим

$$A = -\sqrt[3]{k\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2} = -0{,}09\ дж.$$

4. На рисунке 3 показаны силы, действующие на заряженный шарик на нити, движущийся по окружности. Это — сила тяжести $mg$, кулоновская сила отталкивания $F_к$ и сила $T$ натяжения нити. Разложим силы на горизонтальные и вертикальные составляющие и запишем уравнения движения шарика по горизонтали и по вертикали:

$$T\sin\alpha - F_к\sin\alpha = m\omega^2 r, \qquad (1)$$

$$T\cos\alpha + F_к\cos\alpha - mg = 0. \qquad (2)$$

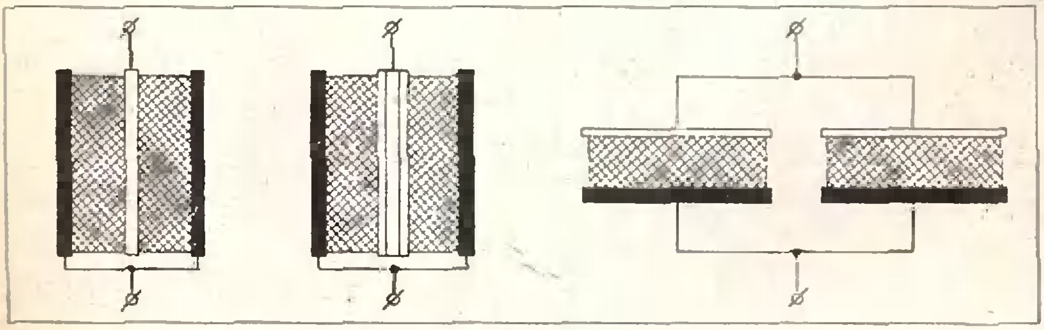


Рис 4

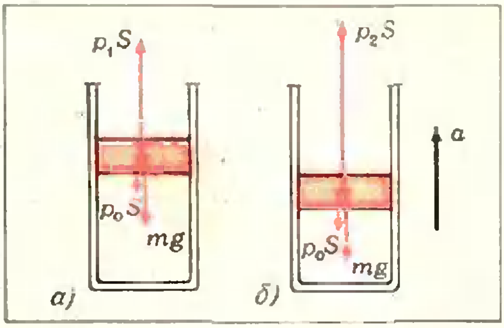



Рис. 5.

Причем (см. рис. 3)

$$F_к = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{r}{\sin\alpha}\right)^2}. \quad (3)$$

Из равенств (1) — (3) находим

$$q = \pm\frac{r}{\sin\alpha}\sqrt{2\pi\varepsilon_0 m\left(\frac{g}{\cos\alpha} - \frac{\omega^2 r}{\sin\alpha}\right)} = \pm 0{,}13 \text{ мкк}.$$

**5**. Используя формулу Томсона для периода электромагнитных колебаний в контуре $T = 2\pi\sqrt{LC}$ и известное соотношение $\lambda = vT$ между длиной волны $\lambda$, скоростью распространения $v$ и периодом электромагнитной волны $T$, находим

$$\lambda = 2\pi v\sqrt{LC}, \quad (1)$$

где $v = 3\cdot10^8$ *м/с* (в вакууме), $C$ — емкость конденсатора в контуре.

Эта емкость равна емкости параллельно соединенных двух одинаковых плоских конденсаторов, образованных поверхностями средней пластины и каждой из наружных пластин (рис. 4). Следовательно,

$$C = 2\varepsilon_0\varepsilon\frac{S}{d}. \quad (2)$$

Подставив это выражение для емкости (2) в соотношение (1), получим уравнение, из которого определим индуктивность катушки:

$$L = \frac{d}{2\varepsilon_0\varepsilon S}\left(\frac{\lambda}{2\pi v}\right)^2 = 25 \text{ мгн}.$$

**6**. Поскольку в движущемся сосуде давление газа под поршнем повышается, ускорение $a$ сосуда и поршня направлено вертикально вверх. На рисунках 5, *а* и *б* показаны силы, действующие на поршень в покоящемся и движущемся с ускорением сосуде: сила тяжести $mg$, сила наружного давления $p_0S$ и силы давления газа на нижнюю поверхность поршня — $p_1S$ в покоящемся и $p_2S$ — в движущемся с ускорением $a$ сосуде.

Запишем условие равновесия поршня в покоящемся сосуде:

$$(p_1 - p_0)S - mg = 0, \quad (1)$$

уравнение движения поршня, перемещающегося вместе с сосудом с ускорением $a$:

$$ma = (p_2 - p_0)S - mg \quad (2)$$

и закон Бойля — Мариотта для газа под поршнем:

$$p_1Sh = p_2S[h(1-\eta)]. \quad (3)$$

Из соотношений (1), (2) и (3) находим наружное давление:

$$p_0 = \frac{m}{S}\left[a\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) - g\right] = 18 \text{ кн/м}^2.$$

**К задаче «Равенства из спичек»**

(см. с. 39)

XIII—VII=VI;
VI=V+I;
XI—V=VI.

**К головоломкам**

(см. с. 39)

1. $28\times28 = 784$.
2. $19\times19 = 361$.
3. $98\times98 = 9604$.
4. $18\times18\times18 = 5832$.
5. $17\times17\times17 = 4913$.

Корректор *Е. В. Сидоркина*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 17/X—74 г.
Подписано в печать 29/XI—74 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 6,94
Тираж 363 265 экз. Т-18692
Цена 30 коп. Заказ 2108

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

# 524288 японских головоломок

На последней странице обложки приведена одна из этих головоломок: нужно уложить все голубые фигурки на желтом поле.

Давайте разберемся, как построена эта головоломка. Как вы видите (см. рисунок на обложке), желтое поле состоит из семи правильных шестиугольников. А как устроены сами фигурки? Посмотрим, какие фигурки можно сложить, соединяя сторонами $n$ правильных треугольников. Из одного, двух и трех треугольников складываются по одной фигурке: треугольник, ромб и трапеция (рис. 1). Из четырех треугольников складываются уже три фигурки (рис. 2). Можно, правда, сложить и четвертую, но она является зеркальным отображением третьей, и мы ее в расчет не берем. Из пяти треугольников складываются четыре фигурки (рис. 3). Из шести треугольников складываются двенадцать фигурок. Нарисуйте их сами. Из семи треугольников складываются двадцать четыре фигурки. Вот они и являются фигурками нашей головоломки (проверьте это!).

Некоторые фигурки имеют названия: чаша, крюк, медведь и т. д. Среди фигурок — 5 симметричных и 19 несимметричных. Перевернув некоторые фигурки, вы получите новую головоломку. Всего переворачиваниями можно получить $2^{19}$ головоломок (почему?). Можно ли уложить какие-либо из них на том же желтом поле?

Попытайтесь также сложить еще какое-нибудь интересное поле (например, ромб) из 12-ти различных фигурок, составленных из шести треугольников каждая.

*Пять читателей, первыми приславшие ответы, будут премированы годовой подпиской на «Квант», а их фамилии будут опубликованы в журнале.*

Рис. 1.

Рис. 2.

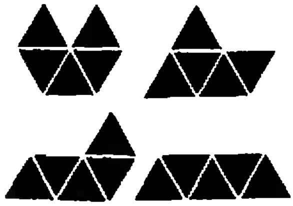


Рис. 3.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

1